硕士研究生学位论文

题目： 李群的拓扑读书报告：

同调群和同伦群的计算

姓　　名：陈力仲

学　　号：1301210029

院　　系：数学科学学院

专　　业：基础数学

研究方向：代数拓扑

导　　师：范后宏

二〇一六年四月

摘要

这个报告集中介绍了李群的基本拓扑信息，包括李群的同调群，Bott周期律以及一些的特殊的同伦群。在这个报告中，首先我们运用了谱序列这个强有力的工具来计算李群的同调群，揭示了李群的同调群和示性类之间的联系；其次我们在Bott周期律的证明中看到了李群与拓扑的各个分支中的紧密联系，如K-理论，分类空间，伪纤维化等等。最后我们介绍了一些李群的特殊维度的非稳定同伦群。

关键词：李群，拓扑

A Report on Topology of Lie Groups

Lizhong Chen (Mathematics)
Directed by Prof. Houhong Fan

ABSTRACT

This report focuses on the basic topological properties of Lie groups, including homoglogy groups of Lie groups, Bott periodicity and some unstable homotopy groups. First, we calculate the homology groups of Lie groups with the powerful tool spectral sequence and show the relationship between the homology groups and characteristic classes. Second, we try to prove Bott periodicity using many different ways in order to show that how Bott periodicity becomes the fundamental theorem of many fields of mathematics. Last, we introduce some unstable homotopy groups which are hard to compute and the relation with the homotopy groups of spheres which are key problem in mathematics.

KEYWORDS: Lie Groups, Topology

目录

序言

在拓扑学的所有研究对象中，李群毫无疑问是最漂亮的研究对象之一，因为李群是分析，代数和几何的统一。在这个读书报告中，我们集中讨论了李群的一些基本拓扑性质。一般来说，有三种方法来研究李群的拓扑性质，首先是给出李群的胞腔分解得到李群的同调群，其次研究关于李群的纤维化所对应的谱序列，我们可以看到，有了谱序列这个强大的工具后，我们很容易给出经典李群的上同调环，最后我们还可以从分析的角度用Morse理论结合李代数来研究李群。在第一章中，我们给出了经典李群的上同调环。第二章中我们计算了例外李群你在域系数下的上同调环。第三章我们从各个角度讨论了Bott周期律。在第四章中我们给出了李群的非稳定同伦群。关于李群的拓扑研究历史，可以参见H.Samelson在1952年的文章[40] 和 A.Borel 1955在1955年的文章 [10]。最后本报告的基本结果都可以在H.Toda 和 M.Mimura合著的书中找到[33]。

第一章　经典李群的同调群

在这一章中，我们主要计算了李群的同调群，从胞腔分解和谱序列两个角度来看。然后我们讨论了李群的分类空间和示性类之间的联系，计算了分类空间的同调群，最后我们通过李群的同调群来计算齐次空间的同调群。

1.1　李群的胞腔分解

记F为 $\mathbb{R}$， $\mathbb{C}$ 或$\mathbb{H}$，$d = d(F) = \dim F$ 。记 $G(n)$ 为 $O(n), U(n)$ 和 $Sp(n)$ 根据 F的不同。

记$E^d_F(n-1)$ 是 F^{n+1}中一个闭球，E^{d-1}_F 是F 中由纯虚数构成的半径为一的闭球。将E^{dn-1}_F 和$E^{d-1}_F \times E^{d(n-1)}_F$等同，定义一个映射$f_{G(n)} : E^{dn-1}_F \to G(n)$

$$f_{G(n)}(q, x) = (\delta_{ij} + x_i p \bar{x_j})$$

其中$x = (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in E^{d(n-1)}_F, x_n = \sqrt{1 - |x|^2}$ and $q \in E^{d-1}_F, p = 2\sqrt{1 - |q|^2}(q - \sqrt{1 - |q|^2})$.同样的我们定义$f_{SG(n)} : E^{dn-1}_F \to SG(n)$

$$f_{SG(n)} = f_{G(n)} \begin{pmatrix} -(q + \sqrt{1 - |q|^2})^2 & \\ & I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

定义 1.1.1. $f_{G(n)}$ 称为是 E^{dn-1}_F 到 $G(n)$的一个本原特征映射，同样的，$f_{SG(n)}$也是一个本原特征映射。

下面我们以$O(n)$为例:

记P_{n-1} 是 $(n-1)$维实射影空间， P^*_{n-1} 是它的矩阵形式。我们这样来看其中的点$x = [x_1, \cdots, x_n] \in P_{n-1}$ 使得 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ ，与$X = (x_i x_j) \in P^*_{n-1}$等同，这样我们将$P_{n-1}$和 P^*_{n-1}等同起来。

一个特征映射 $f_{P-n-1} : E^k_{\mathbb{R}} \to P^*_{n-1}$ 有下面给出

$$f_{P_{n-1}}(x_1, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} x_i x_j & \cdots \\ \vdots & I_{n-k-1} \end{pmatrix}.$$

其中$x_{k+1} = \sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_k^2)}$.

令 $f'_{O(n)}: P_{n-1} \to O(n)$ 由 $f'_{O(n)}(X) = I_n - 2X$来定义，其中 $X \in P^*_{n-1}$。那么 $f_{O(n)} = f'_{O(n)} \circ f_{P_{n-1}}$ 是一个本原特征映射。

接下来我们来给出具体的胞腔。

定义 $\xi_F = p_1 \circ f_{G(n)} : E_F^{dn-1} \to S^{dn-1}$，那么$\xi_F$ 是 $(E_F^{dn-1}, \partial E_F^{dn-1})$和 (S^{dn-1}, e_0)之间的一个相对同胚。

记 $e^{dk-1}_{G(n)} = f_{G(n)}(E_F^{dk-1})$。我们称 $e^{dk-1}_{G(n)}$ 是 $G(n)$的本原胞腔。同样的对于$SG(n)$。

取整数 $n \geq k_i \geq 2; i = 1, 2, \cdots, j$, 定义一个映射

$$\bar{f}_{G(n)} : E^{dk_1-1}_{G(n)} \times \cdots \times E^{dk_j-1}_{G(n)} \to G(n)$$

通过 $\bar{f}_{G(n)}(y_1, \cdots, y_j) = f_{G(n)}(y_1) \cdots f_{G(n)}(y_j)$。

记 $e^{dk_1-1,\cdots,dk_j-1}_{G(n)} = \bar{f}_{G(n)}(E^{dk_1-1}_{G(n)} \times \cdots \times E^{dk_j-1}_{G(n)})$. 我们将要说明 $G(n)$ 是一个由 e^0 和$e^{dk_1-1,\cdots,dk_j-1}_{G(n)}(n \geq k_1 > \cdots > k_j \geq 1)$ 所组成的CW复形。首先$\bar{f}_{G(n)}$ 是一个相对同胚，只需要说明若 $A \in G(n)$,A属于其中一个胞腔。归纳法，若$A \in G(n)$， $A \notin G(n-1)$，那么我们取一个点 y 在E_F^{dn-1} 的内部使得$\xi_F(y) = p_1(A)$。如果我们记 $U = f_{G(n)}(y)$, 那么 $U^*A \in G(n-1)$。由归纳假设，U^*A 属于$G(n-1)$的某一个胞腔 $e^{dk_1-1,\cdots,dk_j-1}_{G(n)}$ $\Phi n-1 \geq k_1 > \cdots > k_j \geq 1\Psi$。因此 A 在某一个胞腔中 $e^{dn-1,dk_1-1,\cdots,dk_j-1}_{G(n)}$。

同样的，我们可以知道 $SG(n)$ 是一个由e^0 和$e^{dk_1-1,\cdots,dk_j-1}_{G(n)}(n \geq k_1 > \cdots > K_j \geq 2)$所组成的CW复形。.我们将具体结论罗列如下:

定理 1.1.2. 正交群 $O(n)$ 是一个由 2^n 个胞腔构成的CW复形，其中胞腔为 $e^0_{O(n)}$ 和 $e^{k_1,\cdots,k_j}_{O(n)}$ $(n > k-1 > \cdots > k_j \geq 0)$.

定理 1.1.3. 特殊正交群$SO(n)$ 是一个由2^{n-1}个胞腔构成的CW复形，其中胞腔为 $e^0_{SO(n)}$ 和 $e^{k_1,\cdots,k_j}_{SO(n)}$ $(n > k_1 > \cdots > k_j \geq 1)$。特别的， $e^{k-1}_{SO(n)}(n \geq k \geq 2)$ 是 k-维射影空间P_{k-1} 在本原特征映射 $f'_{SO(k)} : P_{k-1} \to SO(k) \subset SO(n)$下的像。

定理 1.1.4. 酉群 $U(n)$ 是一个由2^n个胞腔构成的CW复形，其中胞腔为 $e^0_{U(n)}$和$e^{2k_1-1,\cdots,2k_j-1}_{U(n)}$ $(n \geq k_1 > \cdots > k_j \geq 1)$。特别的， $e^{2k-1}_{U(n)}(n \geq k \geq 1)$ 是$2(k-1)$-复射影空间 M_{k-1}的在本原特征映射$f'_{U(k)} : E(M_{k-1}) \to U(k) \subset U(n)$下的像。

定理 1.1.5. 辛群 $Sp(n)$ 是一个由2^n个胞腔构成的CW复形，其中胞腔为$e^0_{Sp(n)}$ 和 $e^{4k_1-1,\cdots,4k_j-1}_{Sp(n)}$ $(n \geq k_1 > \cdots > k_j \geq 1)$。

附注 1.1.6. Stiefel流形 $V^{\mathbb{R}}_{n,m}, V^{\mathbb{C}}_{n,m}$ and $V^{\mathbb{H}}_{n,m}$ 可以由同样的方法得到。

附注 1.1.7. 令$U(n) \to SO(2n)$ 和 $Sp(n) \to SU(2n)$ 是自然嵌入。那么我们可以得到:1. $F_n = SO(2n)/U(n)$ 是一个由2^{n-1} 个胞腔构成的CW复形，其中胞腔为$e^0_{F_n}$ 和

$e_{F_n}^{2k_1,\cdots,2k_j}(n > k_1 > \cdots > k_j \geq 1)$; 2. $X_n = SU(2n)/Sp(n)$ 是一个由 2^{n-1} 个胞腔构成的CW复形，其中胞腔为 $e_{X_n}^0$ 和 $e_{X_n}^{4k_1-3,\cdots,4k_j-3}(n \geq k_1 > \cdots > k_j \geq 2)$。

在得到空间的胞腔分解后，为了计算同调群，我们需要计算边缘映射，在给定每一个胞腔的定向之后和考虑实射影空间的边缘同态，我们有如下引理:

引理 1.1.8. $V_{n,m}^{\mathbb{R}}$上的边缘同态 ∂ 由下面给出

$$\partial e_{V_{n,m}}^{k_1,\cdots,k_j} = \sum_{i=1}^{j}(-1)^{k_1+\cdots+k_i}((-1)^{k_i}+1)e_{V_{n,m}}^{k_1,\cdots,k_i-1,\cdots,k_j}$$

其中$n > k_1 > \cdots > K_j \geq n-m$ 。若 $i > 1$和$k_i - 1 = k_{i-1}$或者 $i = 1$ 和 $j = n-m$，$e_{V_{n,m}}^{k_1,\cdots,k_i-1,\cdots,k_j} = 0$ 。

证明. 见[31]。 □

附注 1.1.9. 上边缘同态可以类似的得到 [31]。

引理 1.1.10. $U(n), Sp(n), V_{n,m}^{\mathbb{C}}, V_{n,m}^{\mathbb{H}}, X_n, F_n$的上（下）边缘同态是平凡的。

那么由胞腔分解，我们马上可知这些空间的同调群。且实射影空间的边缘同态只能是2的倍数，故正交群的同调群只能有$\mathbb{Z}_2$扭元素。

不仅如此，由胞腔之间的关系，我们还可以得到更多关于同调环的信息。

记$e^{G(n)}_{dk_1-1,\cdots,dk_j-1}$ 是一个闭链， $e_{G(n)}^{dk_1-1,\cdots,dk_j-1}$ 是一个上闭链，我们有如下引理:

引理 1.1.11. 在$G(n)$ 和 $SG(n)$中，我们有

$$e^{G(n)}_{dk_1-1,dk_2-1} = e^{G(n)}_{dk_2-1,dk_1-1},\ n \geq k_1, k_2 \geq 1$$
$$e^{SG(n)}_{dk_1-1,dk_2-1} = e^{SG(n)}_{dk_2-1,dk_1-1},\ n \geq k_1, k_2 \geq 2$$

引理 1.1.12. 如果域是可交换的，我们有

$$e^{G(n)}_{dk-1,dk-1} = e^{G(n)}_{dk-1,d(k-1)-1},\ n \geq k \geq 1$$
$$e^{SG(n)}_{dk-1,dk-1} = e^{SG(n)}_{dk-1,d(k-1)-1},\ n \geq k \geq 2$$

引理 1.1.13. 记$*$是$G(n)$和$SG(n)$中的$Pontrjagin$乘积，那么我们有

$$e^{G(n)}_{dk_1-1} * \cdots * e^{G(n)}_{dk_j-1} = e^{G(n)}_{dk_1-1,\cdots,dk_j-1}, n \geq k_1 > \cdots > k_j \geq 1 \tag{1.1.1}$$

$$e^{SG(n)}_{dk_1-1} * \cdots * e^{SG(n)}_{dk_j-1} = e^{SG(n)}_{dk_1-1,\cdots,dk_j-1}, n \geq k_1 > \cdots > k_j \geq 2 \tag{1.1.2}$$

$$e^{G(n)}_0 (resp.\ e^{SG(n)}_0) \text{是一个单位元.} \tag{1.1.3}$$

$$e^{G(n)}_{dk-1} * e^{G(n)}_{dk-1} = 0 \tag{1.1.4}$$

$$e^{SG(n)}_{dk-1} * e^{SG(n)}_{dk-1} = 0 \tag{1.1.5}$$

$$e^{G(n)}_{dk_1-1} * e^{G(n)}_{dk_2-1} = (-1)^{(dk_1-1)(dk_2-1)} e^{G(n)}_{dk_2-1} e^{G(n)}_{dk_1-1} \tag{1.1.6}$$

$$e^{SO(n)}_{k_1} * e^{G(n)}_{k_2} = (-1)^{k_1k_2-1)} e^{SO(n)}_{k_2} e^{SO(n)}_{k_1} \tag{1.1.7}$$

$$e^{SU(n)}_{dk_1-1} * e^{SU(n)}_{2k_2-1} = -1 e^{SU(n)}_{2k_2-1} e^{SU(n)}_{2k_1-1} \tag{1.1.8}$$

有上述关系，我们可以的经典李群的Pontrjagin同调环，具体结果见[47]。

对于上同调的情形，计算是类似的。这里有这样一个问题，作为代数，上同调环和Pontrjagin同调环是同构的吗？这和基域的选取有关，在$\mathbb{Z}_2$系数下，正交群就是一个反例。所以不能由同调群对偶到上同调的情形。

1.2 谱序列

在这一节主要运用Serre谱序列来给出经典李群的上同调环。通过李群在球面上的作用给出的纤维化，我们可以得到一个谱序列，这样就可以归纳的计算李群的同调群。同样的方法我们也可以计算Stiefel流形的同调群。

定理 1.2.1.

$$H^*(U(n), \mathbb{Z}) = \Lambda(x_1, x_3, \cdots, x_{2n-1}), |x_i = i|$$

$$H^*(Sp(n), \mathbb{Z}) = \Lambda(x_3, x_7, \cdots, x_{4n-1}), |x_i = i|$$

证明. 对n用归纳法，当$n = 1$时，$U(1) = S^1$，$H^*(U(1), \mathbb{Z}) = \Lambda(x_1)$成立。假设$n = k$时成立，当$n = k + 1$时有纤维化$U(k) \to U(k + 1) \to S^{2k+1}$，由于$S^(2k + 1)$的欧拉数为0，对应的谱序列退化，那么有$H^*(U(k + 1)) = H^(U(k)) \otimes H^*(S^{2k+1}) = \Lambda(x_1, x_3, \cdots, x_{2k+1})$。对于$Sp(n)$，证明是一样的。 □

定理 1.2.2.

$$H^*(SO(n),\mathbb{Z}_2)=\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),|x_i=i|$$

证明. 对n用归纳法，当$n=2$时，$SO(2)=S^1$，$H^*(SO(1),\mathbb{Z}_2)=\Delta(x_1)$成立。假设$n=k$时成立，当$n=k+1$时有纤维化$SO(k)\to SO(k+1)\to S^k$，由于$S^(k)$的欧拉数在模2系数下为0，对应的谱序列退化，那么有$H^*(SO(k+1))=H^*(SO(k))\otimes H^*(S^k)=\Delta(x_1,x_3,\cdots,x_k)$。 □

因为正交群的整系数同调环很复杂，存在很多$\mathbb{Z}_2$扭元素，具体的计算结果我们放在本章最后。

1.3 示性类

在这一节中，我们定义了李群的分类空间，然后计算了它的同调群。通过向量丛与分类空间之间的联系，我们可以知道丛的示性类就是分类空间的同调群的拉回。

定义 1.3.1. 给定一个向量丛$\gamma=(EG,p,BG,G)$，如果EG是可缩的，我们称γ是一个万有G-丛，BG是G的分类空间。

定理 1.3.2 (向量丛的分类定理)**.** *记K是一个CW复形，那么由映射$\{f:K\to BG\}$决定的同伦类与K上结构群是G的向量丛是一一对应的，具体来说，$f\to f^*(\gamma\times_G F)$。*

下面我们来计算分类空间的同调群:

定理 1.3.3.

$$H^*(BU(n),\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[c_1,c_2,\cdots,c_n],|c_i=2i|$$
$$H^*(BSp(n),\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[q_1,q_2,\cdots,q_n],|q_i=4i|$$
$$H^*(BSO(n),\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_{\not{2}}[w_1,w_2,\cdots,w_n],|w_i=i|$$

证明. 我们以$BU(n)$的计算为例，最简单的是考虑$G\to EG\to BG$对应的谱序列，由于EG是可缩的，从Borel定理可以马上从$H^(U(n))$得到$H^*(BU(n))$，而我们在前面的定理已经计算了$H^*(U(n))$。另一种是考虑$G/H\to BH\to BG$对应的谱序列，这样我们可以用归纳的方法来计算，特别的，在定理的条件下，G/H是一个欧拉数为$0(BSO(n)!2)$的球，这个谱序列是退化的，马上从$H^*(BU(1))=H^*(\mathbb{C}P^\infty)=\mathbb{Z}[c_1]$可以归纳得到结果。

□

定义 1.3.4. 给定一个向量丛 $\xi = (E, p, B, F, G)$，其中B是一个CW复形，G是结构群。我们指定这样的元素$\alpha(\xi) \in H^*(B; R)$，其中$R$是一个系数环，如果$\alpha(\xi)$相对于丛映射是自然的，我们称$\{\alpha(\xi)\}$ 是丛 ξ的示性类。

定理 1.3.5. *向量丛$\xi = (E, p, B, F, G)$的示性类一一对应与$H^*(BG; R)$中的元素。*

下面用陈类来举例说明。

定理 1.3.6. *存在唯一的元素$c_i \in H^{2i}(BU(n))$使得*

1. $c_0 = 1$，$c_i = 0$*如果*$i > n$*;*

2. $c_1 \in H^2(BU(1))$ *是典范的;*

3. $i_n^*(c_i) = c_i$，$i_n^*(c_n) = 0$，*其中*$i_n : U(n-1) \to U(n)$*;*

4. $p_{i,j}^*(c_k) = \sum_{a+b=k} c_a \otimes c_b$，*其中*$p_{i,j} : U(i) \times U(j) \to U(i+j)$*;*
而且我们有$H^*(BU(n)) = \mathbb{Z}[c_i, c_2, \cdots, c_n]$

其中1，2，3都是显然的，为了证明4，我们需要给出c_i的一个具体形式，考虑下面的定理

定理 1.3.7. $\phi_n^* : H^*(BU(n)) \to H^*(BT^n)^{W_n}$，*其中*$\phi_n : BT^n \to BU(n)$，$W_n$*为* $U(n)$*的Weyl群，为*n*维置换群*Σ_n*。*

那么从这个定理可知$c_i = (\phi_n^*)^{-1}(\sigma_i)$，其中$\sigma_i$是关于$H^*(BT^n)$的生成元的对称多项式。考虑下面交换图表

$$\begin{tikzcd} BT^i \times BT^j \arrow[r, "\phi_i \times \phi_j"] \arrow[d, "\simeq"] & BU(i) \times BU(j) \arrow[d, "p_{i,j}"] \\ BT^{i+j} \arrow[r, "\phi_{i+j}"] & BU(i+j) \end{tikzcd}$$

那么

$$\begin{aligned}(\phi_i^* \otimes \phi_j^*)(p_{i,j}^*)(c_k) &= \phi_{i+j}^*(c_k) = \sigma_k(x_1, \cdots, x_{i+j}) \\ &= \sum_{a+b=k} \sigma_a(x_1, \cdots, x_i)\sigma_b(x_{i+1}, \cdots, x_{i+j}) \\ &= (\phi_i^* \otimes \phi_j^*)(\sum_{a+b=k}(c_a \otimes c_b))\end{aligned}$$

对于给定任意一个X的秩为n的复向量丛，由分类定理，存在$f : X \to BU(n)$，容易验证$f^*(c_i)$满足陈类的公理定义，也就是具体给出了陈类的表示。

那么对于其他的示性类，如Stiefel-Whitney类，考虑$BO(n)$在$\mathbb{Z}_2$系数下的同调群，实向量丛的Pontrjagin类可以由复化的复向量丛的陈类给出。

1.4　齐次空间

在这一节，我们运用一个不用的谱序列Eilenberg-Maclane谱序列来计算一些齐次空间的同调群

定理 1.4.1.

$$H^*(U(2n)/Sp(n)) = \Lambda(x_1, \cdots, x_{4n-3}), |x_i = i|$$
$$H^*(Sp(n)/U(n)) = \mathbb{Z}[c_1, \cdots, c_n]/I, I = \langle \sum_{a+b=2i} (-1)^{a+i} c_a c_b | 1 \le i \le n \rangle$$

证明. 我们具体证明第一个，考虑纤维化$U(2n)/Sp(n) \to BSp(n) \to BU(2n)$对应的Eilenberg-Maclane谱序列，$E_2 = Tor_{H^*BU(2n)(\mathbb{Z}, H^*(BSp(n)))} = Tor_A(\mathbb{Z}, B)$，其中$A = H^*(BU(2n) = \mathbb{Z}[c_1, \cdots, c_2 n]$，$B = H^*(BSp(n)) = \mathbb{Z}[p_1, \cdots, p_n]$。记$\mu : Sp(n) \to U(2n)$，那么$\mu^*$给出$B$作为$A$-模的一个结构。令$X$ 是$\mathbb{Z}$ 在A 上的 Koszul消解，具体来说

$$X = \Lambda_A[y_1, \cdots, y_{2n}], |y_i| = (-1, 2i) \quad d : X \to X, d(y_i) = c_i$$

那么$X \otimes_A B = \Lambda_B[y_1, \cdots, y_{2n}] = X_1 \otimes_B X_2$，其中 $X_1 = \Lambda_B[y_1, y_3, \cdots, y_{2n-1}], d = 0$，$X_2 = \Lambda_B[y_2, y_4, \cdots, y_{2n}], d(y_{2i}) = (-1)^i p_i$。这样我们就得到了

$$\begin{aligned} E_2 = H(X_1 \otimes_B X_2) = H(X_1) \otimes_B H(X_2) &= \Lambda_B(y_1, y_3, \cdots, y_{2n-1}) \otimes_B \mathbb{Z} \\ &= \Lambda(y_1, y_3, \cdots, y_{2n-1}) \end{aligned}$$

因为所有的微分都为0，推出$E_2 = E_\infty$，我们得到$[H^*(U(2n)/Sp(n)) = \Lambda(y_1, y_3, \cdots, y_{2n-1}) = \Lambda(x_1, \cdots, x_{4n-3})$。

第二个只要考虑纤维化$Sp(n) \to BU(n) \to BSp(n)$ 对应的Eilenberg-Maclane 谱序列就好。 □

同样的我们还可以证明在$\mathbb{Z}_2$系数下，有

定理 1.4.2. $H^*(SO(2n)/U(n), \mathbb{Z}_2) = \Delta[x_2, x_4, \cdots, x_{2n-2}], |x_i = i|$

附注 1.4.3. 从第一节的胞腔分解中我们以及得到了这些空间的同调群，但是从谱序列的计算，我们得到了更丰富的信息，包括环结构，生成元的表达式，具体含义。而且这个证明同样可以由Serre谱序列给出，但计算会复杂很多，主要集中在微分的计算，通过Eilenberg-Maclane谱序列，我们降低了复杂度，使得我们的计算集中在了E_2页。

1.5 $SO(n)$的同调群

相对于$SO(n)$的同调群，$BSO(n)$的同调群更加容易计算，由E.Brown[14]给出。

定理 1.5.1. 记 $p_q = (-1)^q c_{2q}(\xi(SO(n)) \otimes \mathbb{C}) \in H^{4q}(BSO(n), \mathbb{Z})$，其中 $\xi(SO(n)) \otimes \mathbb{C}$是$\xi(SO(n))$的复化向量丛。那么$H^*(BSO(n), \mathbb{Z}) = \bar{\mathcal{R}}_n / \bar{\mathcal{I}}_n$，其中

$$\bar{\mathcal{R}}_n = \mathbb{Z}[p_1, \cdots, p_{[(n-1)/2]}, X_n, \delta(\omega_{2i_1} \cdots \omega_{2i_l}) | 0 < i_1 < \cdots < i_l \leq [(n-1)/2]]$$

$\bar{\mathcal{I}}_n$ 是由下列关系生成的理想: $2\delta(\omega_{2i_1} \cdots \omega_{2i_l}) = 0$， $X_n = \delta\omega_{2k}$ 如果$n = 2k+1$；如果 $I = i_1, \cdots, i_s$， $\omega(2I) = \omega_{2i_1} \cdots \omega_{2i_s}$， $P(I) = p_{i_1} \cdots p_{i_l}$ 那么

$$\delta\omega(2I)\delta\omega(2J) = \sum_{k \in I} (\delta\omega_{2k}) p((I - \{k\}) \cap J) \delta(2((I - \{k\}) \cup J) - (I - \{k\}) \cap J)$$

我们还有 $\rho(p_q) = \omega_{2q}^2$， $p\delta = Sq^1$；如果 n 是偶数， $p_{n/2} = X_n^2$。

我们来说明一个这个定理告诉了我们哪些信息，首先同调环由两部分生成，其中自由部分有Pontrjagin示性类给出，扭元素有Stiefel-Whitney示性类给出，连接这些元素的关系就是$\bar{\mathcal{I}}_n$，也就是告诉我们上积是什么。证明分两部分，首先验证这些元素都在同调环中且满足给出的关系，这些是显然的。那么我们就给出一个映射

$$\phi : \bar{\mathcal{R}}_n / \bar{\mathcal{I}}_n \to H^*(SO(n), \mathbb{Z})$$

其次就是去验证这个映射是一个满射，具体过程见[14]。

$BO(n)$的结果是类似的，这里不再重复给出了。然后我们给出$SO(n)$的同调群，最早由Pittie[39]得到，为了寻找一个好的表示经历了很长一段时间。这里我们给出一个更一般的情形Stiefel流形的同调群[15]，那么$SO(n)$作为一个特例得到。

定义$M_{n,k} = \{i \in \mathbb{Z} : n - k \leq 2i - 1 \leq n - 2\}$。

定理 1.5.2. 记 $1 \leq k \leq n-1$， $H^*(V_{n,k})$ 中包含了这些元素 y_i， $i \in M_{n,k}$ u_{n-k} 和v_{n-k}，其

中次数分别为$4i-1$，$n-k$，和 $n-1$。那么 $V_{n,k}$ 的整系数同调群由下面给出

$$H^*(V_{n,k}) \simeq \Lambda(\delta z_I, y_i, u_{n-k}, v_{n-1})/\mathcal{I}_{n,k}$$

其中 I 取遍$M_{n,k}$中的非空集合， $i \in M_{n,k}$ 以及 $\mathcal{I}_{n,k}$ 是由下列关系 (1) ~ (16) 生成的一个理想。$I \subset M_{n,k}$是非空的，在关系(7) ~ (11)中的 $J \subset M_{n,k}$ 可以是空集。我们记 $\sigma z_K = 0$ 当 K 是空集或不是 $M_{n,k} \cup \{n/2\}$的子集， $\delta z_{K\cup\{n/2\}} = \delta z_K v_{n-1}$ 当n 是一个偶数。

下面是所有的元素之间的关系:

$$y_i^2 = \delta z_{8i-3} + \delta z_{4i-3}\delta z_{4i-1} \qquad \text{当 } i \le \frac{n+1}{8}$$

$$y_i^2 = \delta z_{4i-3}\delta z_{4i-1} \qquad \text{当 } \frac{n+2}{8} \le i \le \frac{n-1}{4}$$

$$y_i^2 = 0 \qquad \text{当 } i \ge \frac{n}{4}$$

$$2\delta z_I = 0$$

$$(\delta z_{2i-1})^2 = \delta z_{4i-1} \qquad \text{当 } i \le \frac{n-1}{4}$$

$$(\delta z_{2i-1})^2 = 0 \qquad \text{当 } i \ge \frac{n}{4}$$

$$\delta z_I \delta z_J = \sum_{i\in I} \delta z_{2i-1}\delta z_{D(I-\{i\},J)} \prod_{i\in(I-\{i\})\cap J} \delta z_{4j-3}$$

$$\delta z_I y_j = \delta z_{I\cup\{2j\}} + \delta z_{I-\{j\}}\delta z_{4j-3}\delta z_{2j-1} \qquad \textit{for } j \in I, 2j \notin I$$

$$\delta z_I y_j = \delta z_{I-\{2j\}}\delta z_{8j-3} + \delta z_{I-\{j\}}\delta z_{4j-3}\delta z_{2j-1} \qquad \textit{for } j \in I, 2j \in I$$

$$\delta z_I y_j = \delta z_{I\cup\{j\}}\delta z_{2j-1} + \delta z_{I\cup\{2j\}} \qquad \textit{for } j \notin I, 2j \notin I$$

$$\delta z_I y_j = \delta z_{I\cup\{j\}}\delta z_{2j-1} + \delta z_{I-\{2j\}}\delta z_{8j-3} \qquad \textit{for } j \notin I, 2j \in I$$

$$u_{n-k} = 0 \qquad \text{当 } n-k \text{ 是一个奇数}$$

$$u_{n-k}^2 = 0 \qquad \text{当 } n-k \text{ 是一个偶数，} k \le \frac{n}{2}$$

$$u_{n-k}^2 = \delta z_{2n-2k-1} \qquad \text{当 } n-k \text{是一个偶数， } k \ge \frac{n+1}{2}$$

$$v_{n-1} = 0 \qquad \text{当 } n \text{ 是一个奇数}$$

$$v_{n-1}^2 = 0 \qquad \text{当 } n \text{ 是一个偶数}$$

我们简要的来说明一下上面的结果，首先由于$BSO(n)$的同调群与n的奇偶性有关，因为在证明中可以知道这有球的欧拉数是不是0决定，也就是存不存在单独的欧拉示

性类，那么$SO(n)$的同调群也与奇偶性有关，也就是v_n是不是0.然后同调群由这几部分构成，一部分自由的元素和一部分由Steenord算子给出$\mathbb{Z}_2$扭元素，这些信息很容易由整系数和$\mathbb{Z}_2$的同调群给出，这样所有的问题就成了寻找这些元素之间的关系，也就是它们之间的上积是什么，上述定理中罗列了所有可能的关系，这样我们就得到了$SO(n)$在整系数下的同调群。

第二章　例外李群的同调群

在这一章中，我们主要来计算F_4在域系数下的同调群来说明Toda给出的一个通用方法，运用这种方法，结合具体元素的阶数分析和Steenord算子，我们可以完整给出例外李群在域系数下的同调群。

这个方法依赖于关于Eilenberg-Maclane空间的同调群的计算，这是Serre的杰出工作之一，也是谱序列得到一个重要成果，具体见附录。我们需要假定我们已经知道了$K(\mathbb{Z},3)$在域系数下的同调群。

定理 2.0.1. *$H^*(K(\mathbb{Z}),3),\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[u_3,u_5,u_9,\cdots,u_{2^i+1},\cdots]$，其中$Sq^{2^i}u_{2^i+1} = u_{2^{i+1}+1}$；*
$H^*(K(\mathbb{Z}),3),\mathbb{Z}_p) = \Lambda(u_3,u_{2p+1},u_{2p^2+1},\cdots)\otimes\mathbb{Z}_p[u_{2p+2},u_{2p^2+2},\cdots]$，
其中$P^{p^i}u_{2p^i+1} = u_{2p^{i+1}+1},\beta u_{2p^i+1} = u_{2p^i+2}$

在开始计算之间，我们先来讨论下李群的有理型与李代数之间的关系，这样我们可以确定李群的扭元素部分。因为对于例外李群来说，我们所知道的信息很少，而且从李群的分类定理来看，我们知道的是例外李群的李代数，所以我们需要从这些基本的信息中得到一些必要的拓扑信息。这里Morse理论就非常重要了，这里我们引用了Bott的结果。

定理 2.0.2. *G是一个紧致连通李群，那么存在 $x_{2m_i+1}\in H^{2m_i+1}(G;\mathbb{Q})$ 使得*

$$H^*(G;\mathbb{Q}) = \Lambda(x_{2m_1+1},\cdots,x_{2m_l+1})$$

我们称序列$(x_{2m_1+1},\cdots,x_{2m_l+1})$ 是李群G的有理型。

定理 2.0.3. *G是一个紧致连通李群，T是G的极大环。如果G的有理型是$(x_{2m_1+1},\cdots,x_{2m_l+1})$那么我们有*

1. $l = rank(G) = \dim T$;

2. $P(\Omega G,t) = \prod_{i=1}^{l}(1-t^{2m_i})^{-1}$，如果$G$是单连通的;

3. $H^*(BG;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_p[y_{2m_1+1},\cdots,y_{2m_l+2}]$, $y_{2m_i+2} = \tau(x_{2m_l+1})$.

定理 2.0.4. *G是一个有理型为 $(x_{2m_1+1},\cdots,x_{2m_l+1})$的紧致连通李群，$\tilde{\alpha} = a_1\alpha_1+\cdots+a_l\alpha_l$是极大根，$\sum_r\theta_r = d_1\alpha_1+\cdots+d_l\alpha_l$ 是正根的和。那么存在下面关系*

$$\prod_{i=1}^{l} d_i = l!\prod_{i=1}^{l} a_i m_i$$

证明. 见[12]。 □

这个定理马上告诉了我们，从李群的分类定理我们知道所有李群的有理型，也就是有理系数下同调群。

定理 2.0.5. 如果假定

$$m_l < Min(pm_2, p^2)$$

，G 是一个有理型为 $(3 = 2m_1 + 1, 2m_2 + 1, \ldots, 2m_l + 1)$的紧致单连通李群，那么

$$H^*(G, \mathbb{Z}_p) = \Lambda(x_3, x_{2m_2+1}, \cdots, x_{2m_l+1})$$

，也意味G 没有 $\mathbb{Z}_p$-扭元素。

证明. 见 [33]。 □

有上述定理结合李群的分类定理，我们得到李群的扭元素构成:

定理 2.0.6. G 是一个紧致单连通李群，在下列情形G没有$\mathbb{Z}_p$-扭元素:

$$p \geq 2, G = SU(n), Sp(n);$$
$$p \geq 3, G = G_2, Spin(n);$$
$$p \geq 5, G = F_4, E_6, E_7;$$
$$p \geq 7, G = E_8.$$

接下来我们回到例外李群的同调群计算。设G一个单连通的单李群，我们有

定理 2.0.7.

$$\pi_1(G) = \pi_2(G) = 0, \quad \pi_3(G) = \mathbb{Z}$$

这样我们从G消灭高维同伦群来得到Eilenberg-Maclane空间$K(\mathbb{Z}, 3)$，那么嵌入$j : G \to K(\mathbb{Z}, 3)$给出一个$H^*(G, \mathbb{Z}) = [G, K(\mathbb{Z}, 3)]$的一个生成元。记$\tilde{G}$是$j$的纤维，$f : \tilde{G} \to G$，那么$\tilde{G} \to G \to K(\mathbb{Z}, 3)$ 是一个纤维化，且G 是3-连通的。

引理 2.0.8. 记$j^* : H^*(K(\mathbb{Z}, 3), \mathbb{Z}_p) \to H^*(G, \mathbb{Z}_p)$由$j$所诱导

1. 若$p \neq 2$， $Ker\ j^*$是由$\{u_{2p^j+1}, (u_{2p^j+1})^{p^f}; f \geq 0\}$ 所生成的理想;
2. 若$p = 2$，$Ker j^*$ 是由$\{u^{2^f}_{2^i+1}; f \geq 0\}$所生成的理想。

有上述引理，我们就可以通过$\tilde{G} \to G \to K(\mathbb{Z}, 3)$ 从$\tilde{G}$的同调群来计算G的同调群。

定理 2.0.9.

1. 若$p \neq 2$，假定$H^*(\tilde{G}, \mathbb{Z}_p) = \Lambda(x_\alpha)$，其中$x_\alpha$的次数是奇数且$\leq N$。那么我们可以选取恰当且唯一的$x_\alpha$使得$\tau(x_\alpha) = (u_{2p^j+1})^{p^f}$，我们$x_{\alpha'} = \{x_\alpha | \tau(x_\alpha) = 0\}$，存在$\bar{x_{\alpha'}}$使得$f^*(\bar{x_{\alpha'}}) = x_{\alpha'}$。那么我们有

$$H^*(G, \mathbb{Z}_p)) = Im\, j^* \otimes \Lambda(\bar{x_{\alpha'}})$$

其中

$$Im\, j^* \simeq H^*(K(\mathbb{Z}, 3), \mathbb{Z}_p)/(\tau(x_\alpha))$$

2. 结果是类似的，用$\Delta(x_\alpha)$和$\Delta(\bar{x_\alpha})$代替$\Lambda(x_\alpha)$ 和$\lambda(\bar{x_\alpha})$，其中x_α 的选取使得$\tau(x_\alpha) = (u_{2^j+1})^{2^f}$

我们来总结所有的过程:
1. 由李群的有理型得到有理系数下的上同调环，那么也得到了ΩG的上同调环;
2. 通过纤维化$\Omega\tilde{G} \to \Omega G \to K(\mathbb{Z}, 2)$计算得到 $\Omega\tilde{G}$的上同调环，也就是除去一个2维的元素;
3. 然后根据Borel定理由$\Omega\tilde{G} \to P\Omega\tilde{G} \to \tilde{G}$得到$\tilde{G}$ 的上同调环;
4. 最后由上面定理给出G的上同调环。

我们用$G = F_4$的$\mathbb{Z}_3$系数上同调环来说明这一个过程，首先F_4的有理型是$(3, 11, 15, 23)$，我们有$H^*(\Omega\widetilde{F_4}) = \mathbb{Z}_3[y_{10}, y_{14}, y_{22}]$。其次我们得到$H^*(\widetilde{F}_4, \mathbb{Z}_3) = \Lambda(x_{11}, x_{15})$ 次数< 18，与$H^*(K(\mathbb{Z}, 3), \mathbb{Z}_3)$ 比较可知$\tau(x_i) = 0$。那么由定理可知

$$H^*(F_4, \mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_3[x_8] \otimes \Lambda(x_3, x_7) \otimes H^*(\widetilde{F}_4, \mathbb{Z}_3)$$

定理 2.0.10.

$$H^*(F_4, \mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_3[x_8]/(x_8^3) \otimes \Lambda(x_3, x_7, x_{11}, x_{15})$$

其中$P^1 x_3 = x_7$，$\beta x_7 = x_8$。

附注 2.0.11. 上面计算中选取了次数< 18，因为我们李群维数的限制，$\dim F_4 = 3 + \sum |x_i| + 23$。

同样的方法我们得到

定理 2.0.12.

$$H^*(E_6,\mathbb{Z}_3)=\mathbb{Z}_3[x_8]/(x_8^3)\otimes\Lambda(x_3,x_7,x_9,x_{11},x_{15},x_{17})$$
$$H^*(E_7,\mathbb{Z}_3)=\mathbb{Z}_3[x_8]/(x_8^3)\otimes\Lambda(x_3,x_7,x_{11},x_{15},x_{19},x_{27},x_{35})$$
$$H^*(E_8,\mathbb{Z}_3)=\mathbb{Z}_3[x_8,x_{20}]/(x_8^3,x_20^3)\otimes\Lambda(x_3,x_7,x_{15},x_{19},x_{27},x_{35},x_{39},x_{47})$$

其中$P^1x_3=x_7$，$\beta x_7=x_8$，$P^3x_7=x_{19}$和$\beta x_{19}=x_{20}$。

然后考虑$\mathbb{Z}_2$系数，我们有

定理 2.0.13.

$$H^*(F_4,\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[x_3]/(x_3^4)\otimes\Lambda(x_5,x_{15},x_{23})$$

其中$Sq^2x_3=x_5$，$Sq^1x_5=Sq^2x_3=x_3^2$和$Sq^8x_{15}=x_{23}$。

证明. 首先由$F_4/Spin(9)$ 是八元数下的射影空间，$H^*(F_4/Spin(9))=\mathbb{Z}_2[x_8]/(x_8^3)$。考虑$Spin(9)$，由纤维化$B\mathbb{Z}_2\to BSpin(9)\to BSO(9)$对应的谱序列，我们可以得到$H^*(BSpin(9),\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[y_4,y_6,y_7,y_8,y_16]$，然后由Borel定理可知$H^*(Spin(9),\mathbb{Z}_2)=\Delta(x_3,x_5,x_6,x_7,x_15)$，其中$\tau(x_i)=y_{i+1}$。有了上述结果，考虑纤维化$Spin(9)\to F_4\to F_4/Spin(9)$对应的谱序列，由于$x_i$都是transgressive元素和维数，$\tau(x_i)=0$，$i=3,5,6$除了 $\tau(x_7)=x_8$ 或$\tau(x_7)=0$。如果$\tau(x_7)=x_8$，当次数<15时，我们有$H^*(F_4,\mathbb{Z}_2)=\Delta(x_3,x_5,x_6,x_7)$，这与$H^*(K(\mathbb{Z},3),\mathbb{Z}_2)$矛盾，那么只有$\tau(x_7)=0$。这有我们有 $H^*(F_4,\mathbb{Z}_2)=\Delta(x_3,x_5,x_6,x_{15},x_{23})$。为了得到完整结果，给出生成元之间的关系，我们考虑计算BF_4的同调群，由$F_4/Spin(9)\to BSpin(9)\to BF_4$对应的谱序列，我们得到

$$H^*(BF_4,\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[y_4,y_6,y_7,y_{16},y_{24}]$$

且$y_6=Sq^2y_4$，$y_7=Sq^3y_4=Sq^1y_6$，$y_{24}=Sq^8y_{16}$。这样有Borel定理，我们就可知道F_4中生成元的关系。 □

剩下的E_6,E_7,E_8的$\mathbb{Z}_2$的上同调环的计算是类似的，不过复杂度增加好多，主要在于恰当的选取代表元，给出Steenord算子的作用，具体结果见[33]。

第三章　Bott周期律

Bott周期律是二十世纪数学上最伟大的发现之一，连接了数学的各个领域，也是很多领域的基础定理。在这一章中，我们尽量从各个角度来给出Bott周期律的证明，从而显示它在数学各个领域中的重要地位。

3.1　Bott的证明及Morse理论

Bott周期律的原始形式是用李群的稳定同伦群来给出的，参见[13]。

记 $U(n)$ 是一个酉群，有一个自然嵌入映射 $i : U(n) \hookrightarrow U(n+1)$。令 U 是序列 $\cdots \hookrightarrow U(n) \hookrightarrow U(n+1) \hookrightarrow \cdots$ 的直接极限。由 suspension定理，我们知道经典李群的同伦群是稳定的。记 $\pi_k(U) = \pi_k U(n+k)$ 当n足够大。

定理 3.1.1 (Bott periodicity)**.** *酉群的稳定同伦群是周期的。*

$$\pi_k U \cong \pi_{k+2} U$$

同样的，我们可以知道，正交群和辛群的稳定同伦群是周期的

定理 3.1.2 (Bott周期律)**.** *正交群和辛群的稳定同伦群是周期的*

$$\pi_k O \cong \pi_{k+4} Sp$$

$$\pi_k Sp \cong \pi_{k+4} O$$

Bott最原始的证明是以Morse理论的计算为基础，我们给出一个证明梗概。

记M是一个紧致连通的 C^∞流形。记三元组 $\nu = (P, Q, h)$，其中P 和 Q 是M上的点，h 是连接P 到 Q一个道路同伦类。我们把这样的三元组记成 M上的一个基点。

记 M^ν 是由在 h这个同伦类中连接P到Q的所有极小测地线所组成的集合。那么我们有一个明显的映射从 M^ν的双角锥到 M，把$(s,t), s \in M^\nu, t \in [0,1]$ 送到 s的一个点，这个点把 s 分成比率是 $t : 1-t$的两段。我们把诱导映射记成

$$\nu_* : \pi_k(M^\nu) \to \pi_{k+1} M$$

令 s 是在M 上从 P到Q的任意一个测地线。 s的指标，记成 $\lambda(s)$，是由s的内部中的P的共轭点的求和。我们记 $|\nu|$ 是第一个正整数作为一条在h的同伦类中从P到 Q 的

测地线的指标。那么证明的关键就是下面的定理，告诉了我们很多关于对称空间的信息类似于suspension定理。

定理 3.1.3 ([13] THEOREM I). 记M是一个对称空间，对于任意一个M上的基点ν，M^ν还是一个对称空间。更进一步，ν_*在维数小于$|\nu|$是一个满射且在维数小于$|\nu|-1$是一个双射。那么:

$$\pi_k(M^\nu) \cong \pi_{k+1}M \quad 0 < k < |\nu| - 1$$

令 $\cdots \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to \cdots$是一个有对称空间构成的序列，如果每一项满足$M_i = M_{i+1}^\nu$ 其中 ν 是M_{i+1}的一个基点，我们称它是 ν-序列。

为了得到Bott周期律，我们只需要验证下面的定理:

定理 3.1.4 ([13] THEOREM II). 下面三个序列是 ν-序列:

$$U(2n)/U(n) \times U(n) \xrightarrow{2n+2} U(2n)$$

$$O(2n)/O(n) \times O(n) \xrightarrow{n+1} U(2n)/O(2n) \xrightarrow{2n+1} Sp(2n)/U(2n) \xrightarrow{4n+2} Sp(2n)$$

$$Sp(2n)/Sp(n) \times Sp(n) \xrightarrow{4n+1} U(4n)/Sp(2n) \xrightarrow{8n-2} SO(8n)/U(4n) \xrightarrow{8n-2} SO(8n)$$

因为 $U(2n)/U(n) \times U(n) \xrightarrow{2n+2} U(2n)$ 是一个ν-序列，且当n趋向于无穷大时，$|\nu|$也趋向于无穷大。我们有 $\pi_{k+1}(U/U \times U) = \pi_{k+2}U$。

记 $G^{\mathbb{C}}_{2n,n} = U(2n)/U(n) \times U(n)$，$V^{\mathbb{C}}_{2n,n} = U(2n)/U(n)$，存在一个纤维化 $U(n) \to V^{\mathbb{C}}_{2n,n} \to G^{\mathbb{C}}_{2n,n}$。而且 Stiefel manifold $V^{\mathbb{C}}_{2n,n}$ 当n足够大时，同伦群是平凡的。那么由纤维化的同伦群正合列，我们得到 $\pi_k U(n) \cong \pi_{k+1} G^{\mathbb{C}}_{2n,n}$ 当$k \leq 2n$，过渡到稳定同伦群有$\pi_k U \cong \pi_{k+1} U/U \times U$。

综上两个结果，我们就得到了复Bott周期律

$$\pi_k U \cong \pi_{k+1}(U/U \times U) \cong \pi_{k+2} U$$

同样的我们可以得到实Bott周期律。

3.2 Toda的证明及分类空间的唯一性

Toda在1959年[43]给出了一个Bott周期律的拓扑证明，只有酉群的情形下。这个证明构造了一类特殊的空间，满足一定的限制条件，那么这类空间就能给出我们所需要的性质，然后剩下的工作就是去证明酉群在这类空间中。沿着这个思路，Kono[25]证明了一个更加漂亮的结果，关于酉群的分类空间，我们可以知道一个空间的同伦群和其分类空间的同伦群是有深刻的联系的，我们可以将关于酉群的Bott周期律解释称关于酉群的分类空间，那么Kono证明存在这样的一类空间满足Bott周期律，而且这样的空间只能是酉群的分类空间。更进一步，Kishimoto在2001年[24]证明这样的空间在实的情形下也成立。

Toda的证明的核心是给$SU = \cup_n SU(n)$一个准确的描述。

CW复形SU满足如下性质：

U_1：它是单连通的；

U_2：它是一个H-空间带有同伦意义下的乘法；

U_3：$H^*(SU) = \Lambda(e_3, e_5, \cdots)$；

U_4：记$\mathbb{C}P^\infty = \cup_n \mathbb{C}P^n$，存在一个映射

$$f : \Sigma\mathbb{C}P^\infty \to SU \tag{3.2.1}$$

使得f^*诱导在上同调上的满同态。

定理 3.2.1 (Toda). *如果存在空间X满足如下性质U_1 到U_4，那么X' 也满足同样的性质。其中X'为$(\Omega^2 X, 2)$，ΩX是X的道路空间，(X, n)是X的$(n-1)$连通的纤维空间.*

首先我们注意到$\pi_i X' = \pi_{i+1}(\Omega X, 3) = \pi_{i+2} X, \quad i \geq 2.$

$$0 = H_2(X^{(n)}) = \pi_2(X^{(n)}) = \pi_4(X^{(n-1)}) = \cdots = \pi_{2n+2}(X) \tag{3.2.2}$$

$$\mathbb{Z} = H_3(X^{(n)}) = \pi_3(X^{(n)}) = \pi_5(X^{(n-1)}) = \cdots = \pi_{2n+3}(X) \tag{3.2.3}$$

特别的，我们令X为SU，就得到了复的Bott周期律。

下面我们给出这个证明的要点，U_1和U_2的验证是简单的，U_3就是计算X'的同调群，这依赖于下面的引理。U_4需要构造一个恰当的映射，具体见[43]。

引理 3.2.2. *X是一个H-空间，$H^*(X)$是一个Hopf代数，我们可以选取本原元素$e_i \in H^{2i+1}(X)$，使得$H^*(X) = \Lambda(e_1, e_2, \cdots)$。*

由这个引理，我们就很容易根据$\Omega X \to PX \to X$这个纤维化来计算道路空间的同调群。因为e_i是本原元素，那么在上述纤维化对应的谱序列中是超越的。Borel定理就告诉了我们道路空间的同调群。

由纤维化$G \to EG \to BG$ 可知 $\pi_i G = \pi_{i+1} BG$。同样的思路，Kono和Tokanaga通过对BU准确的描述证明了复的Bott周期律。

定理 3.2.3 (Bott周期律). $BU \simeq \Omega^2 BSU$。

定理 3.2.4. *记X是一个有限CW复形且是一个H-空间满足下列性质：*
1. 作为代数，$H^*(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \cdots], |c_i| = 2i$，
2. 存在映射 $j : \mathbb{C}P^\infty \to X$和 $\lambda : S^2 \wedge X \to X$，使得 $(\lambda \circ (S^2 \wedge \lambda))^* : H^*(X,\mathbb{Z}) \to H^*(S^2 \wedge \mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$是一个满射，$Ad^2\lambda : X \to \Omega^2 X$ 是一个H-映射。记$c_1 : X \to \mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$的同伦纤维为$X\langle 2\rangle$。那么$Ad^2\lambda$诱导一个映射$\widetilde{Ad^2\lambda} : X \to \Omega^2(X\langle 2\rangle)$，且$\widetilde{Ad^2\lambda}$是一个同伦等价。

如果BU满足定理中的条件，那么就有$BU \simeq \Omega^B U\langle 2\rangle = \Omega^2 BSU$，这就证明了复的Bott周期律。

为了证明BU满足上述定理中的条件，我们只需要构造相应的j, λ。这里我们把BU看成是K-理论的表示空间，那么它是一个H-空间对应于Whiney加法。这样j, λ就变成了$\tilde{K}(\mathbb{C}P^\infty)$ and $\tilde{K}(S^2 \wedge BU)$中的元素。

记η是在$S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$ 上的Hopf线丛，使得$c_1(\eta) = \alpha \in H^*(S^2, \mathbb{Z})$，$\eta_\infty$是在$\mathbb{C}P^\infty$上的Hopf线丛，使得$c_1(\eta_\infty) = \beta \in H^*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$。

令$j = \eta_\infty - 1 \in \tilde{K}(\mathbb{C}P^\infty)$， $\xi = \lim(\xi_n - n)$ 其中 ξ_n 是$U(n)$ 万有丛。因为 $(\eta - 1)\hat{\otimes}\xi|_{S^2 \vee BU}$ 是平凡的，定义$\lambda = (\eta - 1)\hat{\otimes}\xi \in \tilde{K}(S^2 \wedge BU)$。

记 $c = 1 + c_1 + c_2 + \cdots \in H^{**}(BU, \mathbb{Z})$，

$$
\begin{aligned}
(S^2 \wedge j)^* \lambda^*(c) &= c((S^2 \wedge j)^*(\lambda)) = c((\eta - 1)\hat{\otimes}(\eta_\infty - 1)) \\
&= c(\eta\hat{\otimes}\eta_\infty) c(\eta\hat{\otimes}1)^{-1} c(1\hat{\otimes}\xi)^{-1} \\
&= (1 + \alpha + \beta)(1 + \alpha)^{-1}(1 + \beta)^{-1} \\
&= 1 + \sum_{i \geq 1} (-1)^i \alpha\beta^i
\end{aligned}
$$

那么$(\lambda \circ (S^2 \wedge j))^*(c_{i+1}) = (-1)^i \alpha\beta^i$，这样说明$(\lambda \circ (S^2 \wedge j))^*$是一个满射。

映射 Ad^2 是一个H-映射等价于存在一个同伦交换图表。

$$\begin{array}{ccc} BU \times BU & \xrightarrow{\mu} & BU \\ \downarrow{\scriptstyle Ad^2\lambda \times Ad^2\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle Ad^2\lambda} \\ \Omega^2 BU \times \Omega^2 BU & \xrightarrow{\Omega^2\mu} & \Omega^2 BU \end{array}$$

这和下列图表是对偶的

$$\begin{array}{ccc} S^2 \wedge (BU \times BU) & \xrightarrow{S^2\wedge\mu} & S^2 \wedge BU \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda\times\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ BU \times BU & \xrightarrow{\mu} & \Omega^2 BU \end{array}$$

上述图表是同伦交换的，因为 $(\eta - 1)\hat{\otimes}(\xi \times \xi) = ((\eta - 1)\hat{\otimes}\xi) \times ((\eta - 1)\hat{\otimes}\xi) \in \tilde{K}(S^2 \wedge (BU \times BU))$。

下面我们回到定理的证明，记

$$k = \lambda \circ (S^2 \wedge j) : S^2 \wedge \mathbb{C}P^\infty \to X$$
$$k_1 = Ad\lambda \circ (S^1 \wedge j) : S^1 \wedge \mathbb{C}P^\infty \to \Omega X$$
$$k_2 = Ad^2\lambda \circ j : \mathbb{C}P^\infty \to \Omega^2 X$$

定义 $\alpha_1 \in H^*(S^1,\mathbb{Z}), \alpha_2 \in H^*(S^2,\mathbb{Z}), \beta \in H^2(\mathbb{C}P^\infty)$。那么$H^{2i+1}(S^1 \wedge \mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z}) = \langle \alpha_1 \times \beta \rangle$，$H^{2i+1}(S^2 \wedge \mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z}) = \langle \alpha_2 \times \beta \rangle$。令 $\sigma : H^*(X,\mathbb{Z}) \to H^{*-1}(\Omega X,\mathbb{Z})$ 是一个cohomology suspension映射，那么 $H^*(\Omega X,\mathbb{Z}) = \Lambda(\sigma(c_1),\sigma(c_2),\cdots)$。由于$k^*$是一个满射，$k_1^*(\sigma(c_i)) = \sigma(k^*(c_i)) = \sigma(\alpha_2\beta^{i-1}) = \alpha_1\beta^{i-1}, i \geq 2$

因为ΩX 是一个H-空间，$H_*(\Omega X,\mathbb{Z})$ 是一个 $\mathbb{Z}$上的Hopf代数，这样我们可以选取 ξ_i 使得ξ_i是本原的，$|\xi_i| = 2i - 1$。那么$H_*(\Omega X,\mathbb{Z}) = \lambda(\xi_1,\xi_2,\cdots)$。记 $\zeta_i = [\alpha_1\beta^i \to 1] \in H_{2i+1}(S^1 \wedge \mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z})$ 是本原元素，$k_{1*}(\zeta_i) = \xi_{i+1}, i \geq 1$. 考虑下列交换图表:

$$\begin{tikzcd} & \Omega(X\langle 2\rangle) \arrow[d] & K(\pi_1(X),1) \arrow[l] \\ S^1 \wedge \mathbb{C}P^\infty \arrow[ur, dotted, "\tilde{k}_1"] \arrow[r, "k_1"] & \Omega X & \end{tikzcd}$$

$\tilde{k}_1$ 存在，因为$S^1\wedge\mathbb{C}P^\infty$ 是单连通的，这样存在一个提升。$\tilde{k}_{1*}(\zeta_i) = \xi_{i+1} \in H_*(\Omega(X\langle 2\rangle),\mathbb{Z}) = \Lambda(\xi_2,\xi_3,\cdots)$。

令$\tilde{k}_2 = \widetilde{Ad^2\lambda \circ j} : \mathbb{C}P^\infty \to \Omega^2(X\langle 2\rangle)$，$\tilde{k}_2 = Ad\tilde{k}_1$。令$\tau : H_*(\Omega(X\langle 2\rangle),\mathbb{Z}) \to$

$H_*(\Omega^2(X\langle 2\rangle),\mathbb{Z})$ 是一个 transgression映射。根据下面图表:

$$\begin{tikzcd} H_*(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\tilde{k}_{2*}"] \arrow[d, "j_*"] & H_*(\Omega^2(X\langle 2\rangle),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\tau(\xi_2),\tau(\xi_3),\cdots] \\ H_*(X,\mathbb{Z}) \arrow[ur, "\widetilde{Ad^2\lambda_*}"'] & \end{tikzcd}$$

我们可以得到$\tau(\xi_i) \in image(\widetilde{Ad^2\lambda_*})$，那么$\widetilde{Ad^2\lambda_*}$ 在每一个维度都是同构。因为 X 和$\Omega^2(X\langle 2\rangle)$ 是单连通的，由 Whitehead定理， $\widetilde{Ad^2\lambda}$ 是一个同伦等价，这样我们就完成了定理的证明。

附注 3.2.5. 满足上述定理中的条件的 X 在同伦意义下是唯一的，$X \simeq BU$。

定义$Q(X) = \lim \Omega^n S^n(X)$。令$X$是一个无穷道路孔家， $\xi_X : Q(X) \to X$ by $\xi_X = \lim \epsilon_n^{-1} \circ \Omega^n(Ad^n\epsilon_n)^{-1}$ 其中 $\epsilon_n : X \simeq \Omega^n B_n$。

那么存在一个映射$\epsilon : BU \to Q(\mathbb{C}P^\infty)$ 使得$\xi_{BU} \circ Q(i) \circ \epsilon \simeq id_{BU}$，其中$i : \mathbb{C}P^\infty \to BU$ 是良定的。令 $j' = \xi_X \circ Q(j) \circ i'$ 其中 $i';\mathbb{C}P^\infty \to Q(\mathbb{C}P^\infty)$ 是一个含入映射。

定理 3.2.6. 如果X 满足上述定理中的条件，映射 $\xi_X \circ Q(j) \circ \epsilon : BU \to X$ 是一个同伦等价。

关于实的情形，这里就不展开论述了，具体可以参见Kishimoto的文章[24]，其中一个值得注意的是，因为BSO的同调群含有$\mathbb{Z}_2$扭元素，为了处理这样的情形，我们需要考虑示性类和Steenord算子在上的作用。

3.3 Milnor的黎曼几何证明

Milnor在一个小册子"Morse Theory"[32]利用黎曼几何的指标计算证明复Bott周期律，也给出了实Bott周期律的证明梗概。

记 $U(n)$ 是一个酉群， $\mathfrak{u}(n)$ 是 $U(n)$的李代数，由反厄米矩阵组成。记 $SU(n)$ 是由行列式为1的矩阵构成的特殊酉群。

定理 3.3.1 ([32] THEOREM23.3)**.** 嵌入映射 $G^{\mathbb{C}}_{2n,n} \to \Omega(SU(2n); I, -I)$ 诱导同伦群的同构在维数$\leq 2n$时。因此

$$\pi_i G^{\mathbb{C}}_{2n,n} \cong \pi_{i+1} SU(2n) \quad i \leq 2n$$

这样我们有 $\pi_i U \cong \pi_i U(n) \cong \pi_{i+1} G^{\mathbb{C}}_{2n,n} \cong \pi_{i+2} SU(2n)$ 当n足够大时。从纤维化$SU(n) \to U(n) \to S^1$，我们得到 $\pi_i SU(n) \cong \pi_i U(n)$ 当 $i \neq 1$。综上我们就得到了复Bott周期律$\pi_i U \cong \pi_{i+2} U$。

证明的关键是寻找 $G^{\mathbb{C}}_{2n,n}$ 和$\Omega(SU(2n);I,-I)$之间的联系和计算从I 到 $-I$的测地线的指标。这些由下面两个引理给出:

引理 3.3.2 ([32] LEMMA 23.1)**.** *由$SU(2n)$中连接I和 $-I$的极小测地线组成的空间与复Grassmann流形$G^{\mathbb{C}}_{2n,n}$是同胚的。*

引理 3.3.3 ([32] LEMMA 23.2)**.** *每一条$SU(2n)$中从I 到 $-I$ 的非极小测地线的指标 $\geq 2n+2$。*

让我们先考虑$U(n)$ 中从 I 到 $-I$的所有测地线。取定 $A\in\mathfrak{u}(n)$ 使得 $\exp A=-I$。因为复矩阵是可以对角化的， A 有如下形式:

$$A=\begin{pmatrix} ia_1 & & & \\ & ia_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & ia_n \end{pmatrix}$$

那么，

$$\exp A=\begin{pmatrix} e^{ia_1} & & & \\ & e^{ia_2} & & \\ & & \cdot & \\ & & & e^{ia_n} \end{pmatrix}$$

因此 $\exp A=-I$ 等价于 A 有下面的形式:

$$A=\begin{pmatrix} ik_1\pi & & & \\ & ik_2\pi & & \\ & & \cdot & \\ & & & ik_n\pi \end{pmatrix}$$

其中 k_i是一些奇数。

因为测地线 $s:t\mapsto\exp tA,\quad t\in[0,1]$的长度是 $|A|=\sqrt{\mathrm{tr}AA^*}=\pi\sqrt{k_1^2+\cdots+k_n^2}$， A 决定一条极小测地线当且仅当$k_i=\pm1$ 。在这里我们有 $|A|=\pi\sqrt{n}$。

我们把矩阵 A 看成是一个$\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$的映射，注意到A 由它的特征空间完全决定，分别为 $\mathrm{Eigen}(i\pi)$,特征值为$i\pi$的特征向量和 $\mathrm{Eigen}(-i\pi)$特征值为$-i\pi$的特征向量。由

于$\mathbb{C}^n$ 可以分解成 Eigen$(i\pi)\oplus$Eigen$(-i\pi)$，那么矩阵A 完全由 Eigen$(i\pi)$所决定。这样在 $U(n)$中从I 到 $-I$ 的极小测地线所构成的空间可以看成是由$\mathbb{C}^n$所有的子空间的集合构成的空间。

然而，这个空间有不同维度的分支，不方便处理。但我们用$SU(n)$代替$U(n)$且$n = 2m$，这样的话，$a_1 + \cdots + a_{2m} = 0$ ， $a_i = \pm\pi$就限制了Eigen$(i\pi)$ 是$\mathbb{C}^{2m}$的一个m维的向量子空间。这就证明第一个引理。第二个引理需要仔细的计算指标，这里略过。

定理 3.3.4 ([32] THEOREM 22.1)**.** *Ω^d 是由从p到q的极小测地线构成的空间，如果这是一个拓扑流形且每一条从 p到q 的非极小测地线的指标$\geq \lambda_0$，那么相对同伦群$\pi_i(\Omega, \Omega^d)$是0，当$0 \leq i < \lambda_0$时。*

这样我们就得到了

$$\pi_i(\Omega^d) \to \pi_i(\Omega)$$

是一个同构，当$i \leq \lambda_0 - 2$时。这就说明了复Bott周期律。

3.4 其他证明

在这一节我们简单总结下其他角度的证明，从K-理论，单纯复形的范畴论，伪纤维化以及Clifford代数。剩下的其他证明可以查看具体文章，如Dyer和Lashof 给出的最基本的拓扑学证明[16]，以我们前面计算得到的李群的同调群结合Whitehead定理来证明Bott映射都是弱同伦等价，Wood[46]将Bott周期律推广到了Banach空间，是Atiyah 证明的自然推广，还有分析指标理论的证明。从这些学习中，我了解数学各个学科之间的紧密联系，也明白了数学中最美的定理是最简单，联系各个领域，是数学发展的基础。

3.4.1 M.Atiyah的证明及K-理论

定义 3.4.1. 给定一个CW复形X，定义$K(X) = [X, \mathbb{Z} \times BU]$为空间$X$的K-群。

那么复Bott周期律可以用K-理论的语言写出来:

定理 3.4.2 (Bott周期律)**.** *X是一个有限CW复形，$K(X \times S^2) = K(X) \otimes K(S^2)$;*
或者考虑约化K理论，$\tilde{K}(X \wedge S^2) = \tilde{K}(S^2 X) = \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(S^2)$

记 $Vect(X)$空间 X上复向量丛的等价类的集合，复向量丛ξ，η 的Whitney和 $\xi \oplus \eta$ 是交换的和结合的。设 0 是0-维复向量丛的等价类，那么这样子$Vect(X)$构成了一个半群。通过Grothendieck构造，我们从$Vect(X)$得到一个群，记为$\bar{K}(X)$ 。

定义 3.4.3. $\bar{K}(X) = F(Vect(X))/(\xi \oplus \eta - \xi - \eta)$，其中$F(Vect(X))$ 是由 $Vect(X)$中元素生成的自由群。

设$1_{\mathbb{C}}$ 是一个1-维平凡丛，那么$\bar{K}(X)$ 构成了一个以 $1_{\mathbb{C}}$ 为单位元，以张量积为乘法的环。

从向量丛的分类定理可知，$\bar{K}$ 与 $\tilde{K}$是等价的，这样子我们可以向量丛的角度来证明复Bott周期律。证明的要点在于如何恰当由X上的向量丛构造出$X \times S^2$上的向量丛。

给定一个向量丛$p : E \to X$，令$f : E \times S^1 \to X \times S^1$ 是乘积丛$p \times Id : E \times S^1 \to X \times S^1$的一个自同构。这样对于给定的$x \in X$和$z \in S^1$，$f(x, z) : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$ 是一个同构，因此从E和f我们可以通过把两个$E \times D_2$ 沿着由f给出的同构把$E \times S^1$粘起来来给出一个在$X \times S^2$上的丛，记为$[E, f]$，其中f称为粘接函数。而且f的同伦类完全决定丛的分类。

因此我们的证明变成丛同构的意义下，寻找一个最简单的f。首先我们用洛朗级数来逼近，然后转化成多项式函数，最后变成线性函数。具体过程见[8]。

3.4.2　范畴论的证明

B.Harris运用单纯形的方法构造分类空间给出一个Bott周期律的证明。在这个证明中基域$\mathbb{C}$ 是很重要的，每一个$\mathbb{C}$上的矩阵是可对角化。另一个关键点是当n足够大时，$V_{n,k}^{\mathbb{C}}$ 的低维度同伦群退化。

定理 3.4.4 (Bott 周期律)**.** $\Omega U \simeq \mathbb{Z} \times BU$ 或$B(\mathbb{Z} \times BU) \simeq U$。

由群的完备化定理可知$\Omega(B(\coprod_n BU(n))) = \mathbb{Z} \times BU$，$B(\coprod_n BU(n)) = B(\mathbb{Z} \times BU)$那么Bott周期律等价于$B(\coprod_n BU(n)) \simeq U$。

由于$BU(n) \simeq Gr_n$，其中$Gr_n = G_n(\mathbb{C}^\infty)$，$Gr = \coprod_n Gr_n \simeq \coprod_n BU(n)$，只需要说明$BGr \simeq U$。

记 U是$\mathbb{C}^\infty$ 的酉变换，Gr 是有限秩不为0的厄米投影E。那么我们定义一个单纯空间 $X = \{X_n | n \geq 0\}$，$X_0 = *$，$X_1 = Gr$，$X_n = \{[E_1, \cdots, E_n] \in (Gr)^n | E_i E_j = 0$ 若 $i \neq j\}$。边缘算子为

$$\partial_i([E_1, \cdots, E_n]) = \begin{cases} [E_1, \cdots, E_i + E_{i+1}, \cdots, E_n], 1 \leq i < n \\ [E_1, \cdots, E_{i-1}], i = n \end{cases}$$

和

$$s_i([E_1, \cdots, E_n]) = [E_1, \cdots, E_{i-1}, 0, E_i, \cdots, E_n], 0 \leq i \leq n.$$

那么我们有 $BGr = |X|$.

定理 3.4.5. $|X|$ 与 U是同胚的。

证明. 定义 $\phi : X_n \times \Delta^n \to U$

$$\phi([E_1, \cdots, E_n], (t_1, \cdots, t_n)) = e^{2\pi i(t_1 E_1 + \cdots + t_n E_n)}$$

由于 ϕ保持等价关系，那么诱导 $\bar{\phi} : |X| \to U$。只需要验证$\bar{\phi}$ 是一个双射，其中单射由定义可知，满射由矩阵的对角化可知。

记 Y 是一个单纯空间，其中$Y_0 = *$， $Y_q = (\coprod_n BU(n))^q$，$|Y| = B(\coprod_n BU(n))$。我们想证明$|X|$ 与$|Y|$是同伦等价的。为了证明这个，我们构造一个中间的空间Z，使得$|Z|$分别与$|X|$和 $|Y|$同伦等价。

引理 3.4.6 (Criterion)**.** 一个单纯空间的映射$Z \to X$，使得$\forall n, Z_n \to X_n$ 是一个同伦等价，那么诱导一个同伦等价$|Z| \to |X|$。

具体Z的构造在[18]给出。

沿着这个思路， Griffen 在[17]中给出了实Bott周期律的证明。

3.4.3 伪纤维化的证明

McDuff在一此报告中给出了如何利用Configuration Space来构造一类伪纤维化。作为其中的一个特例，我们通过线性代数构造这样一个伪纤维化 $f : H \to U$ ，其中H是一个可缩空间和纤维$\mathbb{Z} \times BU$，这样有同伦群的正合列，我们就得到了复Bott周期律。

具体的说，令 H_n 是由$n \times n$ 是特征值都在 $[0, 1]$的厄米矩阵构成的空间，那么 H_n 是可缩的且定义$f_n : H_n \to U(n)$， $f(h) = exp(2ih) = u$。纤维$f^{-1}(u)$ 是由$ker(u-1)$的所有子空间的Grassmanian流形构成。那么$f : H \to U$的纤维是$\coprod_{n\geq 0} Gr_n(\mathbb{C}^\infty) \simeq \coprod_{n\geq 0} BU(n)$

然后我们只需要将 f 稳定化使得 f 是一个伪纤维化。在伪纤维化之后，纤维就是变成了$\mathbb{Z} \times BU$。

沿着这个方法，Aguilar和Pireto 将这个过程用线性代数的语言具体写了出来，证明细节见[2]。这应该是一个最初等的证明，只用到了线性代数的知识和伪纤维化的概念。

同样的，Brehens在2002年给出了实Bott周期律的证明[9]。

3.4.4　Clifford代数的证明

最早Atiyah在 7 猜想应该有一个Clifford代数的证明，因为Clifford代数有着同样的周期性。

Karoubi 在[21]中第一个给出了Clifford代数的证明。证明的核心通过新建一个K-理论的模型将Clifford代数的周期性转化为K-理论的周期性，然后去证明这个新的K-理论和原来的K-理论是等价的。

$\mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$ 的 Clifford代数定义如下:

定义 3.4.7. 定义$Cl(1) =< e|\ e$ 的次数是一个奇数$, e^2 = 1, e^* = e >$，$Cl(-1) =< f|f$ 的次数是一个奇数,
$-1, f^* = -f >$。那么$Cl(n) = Cl(1)^{\otimes n}$ ，$Cl(-n) = CL(-1)^{\otimes n}$，其中$(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{|b||c|}ac \otimes bd$，$(a \otimes b)^* = (-1)^{|a||b|}a^* \otimes b^*$。

记 A, B 是有限维$\mathbb{Z}_2$-分次代数。如果存在 ${}_AM_B, {}_BN_A$ 使得 ${}_AM_B \otimes_B {}_BN_A = {}_AN_A, {}_BN_A \otimes_A {}_AM_B = {}_BB_B$，那么 A, B 称为 Morita等价。

如果A, B 是Morita 等价的，那么 $N \otimes_A -, M \otimes_B -$ 给出了 $A - Mod$范畴和$B - Mod$范畴之间的一个等价。

引理 3.4.8. $\mathbb{R} \simeq_M Cl(1) \otimes Cl(-1)$。

证明. 存在一个 $Cl(1) \otimes Cl(-1)$ 和$End(\mathbb{R}^{1,1})$ 之间的同构映射ϕ:$\phi(e \otimes 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$且$\phi(1 \otimes f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$。而 $End(\mathbb{R}^{1,1}) \simeq_M \mathbb{R}$ 是明显的。 □

$Cl(n+m) \simeq_M Cl(n) \otimes Cl(m)$，特别的，$Cl(3) \simeq \mathbb{H} \otimes Cl(-1)$，$Cl(-3) \simeq \mathbb{H} \otimes Cl(1)$。

定理 3.4.9 (Clifford代数的周期律)**.** $Cl(n) \simeq_M Cl(n + 8)$.

证明. $Cl(-4) \simeq_M Cl(-1) \otimes Cl(-3) \simeq Cl(-1) \otimes \mathbb{H} \otimes Cl(1) \simeq Cl(3) \otimes Cl(1) \simeq_M Cl(4)$ □

接下来要做的就是将这个周期律转化成K-理论的周期律，一个方法就是考虑有伪从定义的K-理论。

定义 3.4.10. 定义$KO^n(X)$ 是 X上$Cl(-n)$-线性 K-闭链的同伦等价类的集合。具体来说，(V, F) 其中 V 是一个 $Cl(n)$-模， F 与 $Cl(n)$ 所诱导的作用交换， $V = V_1 \oplus V_2$ 作为$Cl(n)$-模。

定理 3.4.11 (Bott周期律)**.** $KO^n(X) \simeq KO^{n+8}(X)$

证明. 因为 $Cl(-n-8)$和 $Cl(-n)$ 是 Morita等价的，令$_{Cl(-n-8)}M_{Cl(-n)}$ 是给出等价关系的模，那么 $M\otimes_{Cl(-n)}$ 是一个 $Cl(-n)$-线性 K-闭链和 $Cl(-n-8)$-线性 K-闭链的一个等价关系。 □

现在目标是证明$KO^*(X) \simeq KO^*_{Atiyah}(X)$，只需要去验证$KO^*(X)$满足上同调公理，且在零维是相等的。这样我们就得到了Bott周期律。

第四章　李群的同伦群

由Bott周期律可知，经典李群的同伦群是稳定的，那么李群的非稳定同伦群是怎么样？首先我们有$pi_{2n+1}(U(m)) \simeq \mathbb{Z}$当 $m > n \geq 1$ ，$\pi_{2n}(U(m)) = 0$ 当$m > n$，那么$m = n$时结果是什么？这就是$U(n)$ 的第一个非稳定同伦群。最先是通过李代数和示性类得到的 [11]，具体是$\pi_{2n}(U(n)) = \mathbb{Z}_{n!}$。在这里，我们用H.Toda在 [43] 的方法来计算，因为这个方法具有一定的普遍性，可以计算更多的同伦群。

记 $\mathbb{C}P^n$ 是一个n维复射影空间， $\mathbb{C}P^\infty = \cup \mathbb{C}P^n$ ，即$K(\mathbb{Z}, 2)$，是一个H-空间。那么存在一个胞腔乘积

$$\xi_0 : \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$$

这样我们得到一个新的映射$\xi : \Sigma(\mathbb{C}P^\infty \wedge \mathbb{C}P^\infty) \to \Sigma\mathbb{C}P^\infty$，将其限制到$\Sigma(\mathbb{C}P^\infty \wedge \mathbb{C}P^1) = \Sigma^3\mathbb{C}P^\infty$，同样的记成 :

$$\xi : \Sigma^3\mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$$

考虑诱导的映射，

$$\xi^* : H^*(\Sigma\mathbb{C}P^\infty) \to H^*(\Sigma^3\mathbb{C}P^\infty)$$

容易验证 $\xi^*(\Sigma e^{2k}) = k \cdot \Sigma^3 e^{2(k-1)}$。

由纤维化$U(1) \to U(n) \to SU(n)$可知，$U(n)$ 和 $SU(n)$ 的同伦群当 $n \geq 3$ 是相等的，而且$SU(n)$ 是单连通的，更加容易处理。接下来我们只考虑$SU(n)$。

记 ξ_n 是下面的复合映射

$$\xi \circ \Sigma^2\xi \circ \cdots \circ \Sigma^{2(n-2)}\xi : S^{2n+1} \subset \Sigma^{2n-1}\mathbb{C}P^\infty \to \cdots \to \Sigma\mathbb{C}P^\infty \subset SU$$

，那么$\{\xi_n\}$ 是 $\pi_{2n+1}(SU)$的一个生成元。而且映射$\xi_{n*} : H_{2n+1}(S^{2n+1}) \to H_{2n+1}(\Sigma\mathbb{C}P^\infty)$ 的次数是 $n!$。

纤维化$p : SU(n+1) \to SU(n+1)/SU(k)$ 当限制到 $\Sigma\mathbb{C}P^{k-1}$是平凡的。令 $\xi_{n,k}$ 是下面的复合映射

$$p \circ \xi_n : S^{2n+1} \to \Sigma\mathbb{C}P^n/\Sigma\mathbb{C}P^{k-1}$$

定理 4.0.1.

$$\pi_{2n}(SU(k)) \simeq \pi_{2n+1}(\Sigma\mathbb{C}P^n/\Sigma\mathbb{C}P^{k-1})/\xi_{n,k} \quad for \quad k \geq 2$$
$$\pi_{2n-1}(SU(k)) \simeq \pi_{2n}(\Sigma\mathbb{C}P^n/\Sigma\mathbb{C}P^{k-1}) \quad for \quad n > k \geq \frac{n-1}{2}$$

证明. 首先，从纤维化 $SU(k) \to SU(n+1) \to SU(n+1)/SU(k)$ 的同伦群长正合列和 $\pi_{2n}(SU(n+1)) = 0$，我们知道 $\pi_{2n}(SU(k)) \simeq \pi_{2n+1}(SU(n+1)/SU(k))/\xi_{n,k}$。那么由同构 $i_* : \pi_{2n+1}(\Sigma\mathbb{C}P^n/\Sigma\mathbb{C}P^{k-1})/\xi_{n,k} \simeq \pi_{2n+1}(SU(n+1)/SU(k))$，当$2n+1 \leq 4k+2$，可以给出定理中的同构。

其次，由于映射 $\xi_n(\Sigma^{2n-1}e^2) = n!\Sigma e^{2n}$, $\xi_{n,k}$ 的次数为 $n!$，这意味着$\{\xi_{n,k}\}$ 的阶是无穷的，当 $n \geq k$时。结合同构 i_*和同伦长正合列，我们给出第二个同构。 □

那么 Borel-Hirzeburch 定理立刻由上述定理给出。

沿着同样的方法，我们来计算更多的关于 $SU(n)$的同伦群。

定理 4.0.2.

1.$\pi_{2n+1}(SU(n)) \simeq \mathbb{Z}_2$，*当*$n$*是偶数且* $n \geq 2$*;* $\pi_{2n+1}(SU(n)) \simeq 0$ *,当* n*是奇数;*

2.$\pi_{2n+2}(SU(n)) \simeq \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_{(n+1)!}$ *,当*n*是偶数且* $n \geq 4$， $\pi_{2n+2}(SU(n)) \simeq \mathbb{Z}_{(n+1)!/2}$ ，*当*n*是奇数。*

这个证明依赖于给$\Sigma\mathbb{C}P^{n+1}/\Sigma\mathbb{C}P^{n-1} = S^{n+1} \cup e^{2n+3}$一个好的刻画。当 n 是偶数时，$\Sigma\mathbb{C}P^{n+1}/\Sigma\mathbb{C}P^{n-1}$ 与$S^{2n+1} \vee S^{2n+3}$ 是弱同伦等价的，因为$Sq^2 e^{2n} = n \cdot e^{2(n+1)} = 0$。当 n 是奇数时，通过考虑下面两个配对的同伦正合列，$(\Sigma\mathbb{C}P^{n+1}/\Sigma\mathbb{C}P^{n-1}, S^{2n+1})$，$(E^{2n+3}, S^{2n+2})$我们知道$\pi_{2n+2}(\Sigma\mathbb{C}P^{n+1}/\Sigma\mathbb{C}P^{n-1}) = 0$ 和
$\pi_{2n+3}(\Sigma\mathbb{C}P^{n+1}/\Sigma\mathbb{C}P^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$。定理第一部分以及得到。

接下来我们考虑映射$\xi_{n+1,n}$。当 n 是奇数时，我们有 $\{\xi_{n+1,n}\} = (n+1)!/2\pi_{2n+3}(\Sigma\mathbb{C}P^{n+1}/\Sigma\mathbb{C}P^{n-1})$。当 n是偶数时，我们有 $\{\xi_{n+1,n}\} = (n+1)!\iota_{2n+3}$。这就完成了定理的第二部分。

通过这个方法，Matsunaga在 [29] 中研究了$X_n = \Sigma\mathbb{C}P^{n+2}/\Sigma\mathbb{C}P^{n-1}$来计算 $\pi_{2n+i}(U(n))$ 当 $i = 3, 4, 5$时。

附注 4.0.3. $\pi_{2n+3}(U(n))$ 与复Stiefel流形$W_{m,3}$上存不存在交叉截面有关，具体来说，$W_{m,3}$ 存在交叉截面当且仅当m 是 24的倍数 [20]。 Matsunaga在[28]给出了一个解释。

同样的，Matsunaga 在 [26]中通过研究$\Sigma\mathbb{C}P^{n+3}/\Sigma\mathbb{C}P^{n-1}$计算了 $\pi_{2n+6}(U(n))$以及$\pi_{2n+7}(U(n))$ 的$\mathbb{Z}_2$扭元素，在[27]得到$\mathbb{Z}_p$扭元素，$p > 2$。

附注 4.0.4. 从上面结果可知，$\pi_{2n+k}(U(n))$ 的计算随着 k的增加变得越来越复杂。需要更多的工具如二阶上同调算子 [38] [1]，K-理论[5]以及对Stiefel流形更深入的了解 [6] [20]。在上述计算中，我们也了解了李群的同伦群和球的同伦群之间的联系。然而球的同伦群的计算是代数拓扑的核心问题，并且非常困难。

对于大于2的素数p， Matsunaga在[30]得到了酉群的同伦群的一个一般公式。

定理 4.0.5. 对于一个大于2的素数 p，

$$^{p}\pi_{2n+2k-3}(U(n)) = \mathbb{Z}_{p^N}$$

当$k \leq p(p-1)$， $n > k$ 且 $n + k = 0 \mod p$，其中 $N = \min([\frac{k-1}{p-1}], \nu_p(n+k))$ ， $\nu_p(x)$ 是 p 的最大次数使得整除 x。

证明. 见[30] □

回顾上面的计算，我们都是以[43]中Theorem 4.3为基础，通过计算截断复射影空间的同伦群来计算酉群的同伦群。显然截断复射影空间的同伦群不是容易计算的，但是我们知道它的同伦群是稳定的，那么我们可不可以计算稳定同伦群？ R.Mosher在[35] 和[35] 通过Adams谱序列给出了非常好的结果

记 $\mathbb{C}P^\infty = \cup_m \mathbb{C}P^m$ ，基点是 $\mathbb{C}P^0$。 $\mathbb{C}P^\infty$ 上的乘法将$\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$ 映入 $\mathbb{C}P^{n+m}$。

记π_s^*是约化的稳定同伦群，那么π_s^* 是一个一般上同调理论 [45]。这样我们可以构造一个Adams谱序列如下:

定理 4.0.6. $\{E^r\mathbb{C}P^\infty, d^r\mathbb{C}P^\infty\}$, $r \geq 1$ 是一个收敛到分次G代数$\pi_s^*\mathbb{C}P^\infty$ 的谱序列。

这样我们得到了如下结果$\pi_s^k\mathbb{C}P^\infty$ 的 $\mathbb{Z}_2$扭元素，当$9 \leq k \leq 19$ [35]。

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\mathbb{Z}_8$	0	$\mathbb{Z}_4$	0	$\mathbb{Z}_4$?2$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$?$\mathbb{Z}_4$?$\mathbb{Z}_2$	2$\mathbb{Z}_2$?$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{16}$?2$\mathbb{Z}_2$?$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{64}$

其中 $A?B$ 满足扩张$0 \to A \to A?B \to B \to 0$.

同样的方法我们也能计算 $\pi_{2n+i}^s\mathbb{C}P^\infty/\mathbb{C}P^{n-1}$，当 $8 \leq i \leq 13$ [34]。由Toda[43]中的结果可知，当$0 \leq t < n$，那么有 $\pi_{2n+2t+1}^s\mathbb{C}P^\infty/\mathbb{C}P^{n-1} \simeq \pi_{2n+2t+1}(U(n))$。

附注 4.0.7. $\pi_{2n+9}(U(n))$的计算细节，可见 [36].

前面都是计算酉群的同伦群，从同调群的计算来看，酉群的同调群相对简单很多，而正交群的计算则困难很多，那么在同伦群的计算上，也差不多是如此。在这报告的最后，我们引用M.Kervaire [22]的一张图表来给部分正交群的同伦群。M.Kervaire通过比较李群和球的同伦群的生成元之间的联系，加上已有的球的同伦群的结果[44]和Stiefel流形的同伦群 [37]，得到了 $\pi_{2n+r}(U(n))$ 当$r \leq 2$，和部分 $SO(n)$的同伦群

定理 4.0.8. $\pi_{2n+r}(SO(n))(k>1)$

r \ n	8k	8k+1	8k+2	8k+3	8k+4	8k+5	8k+6	8k+7
-1	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
0	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}$
1	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$
2	$\mathbb{Z}_{24}\oplus\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4\oplus\mathbb{Z}_{24d}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$
3	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{8d}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8$
4	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{8d}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$

在d 不确定是1 或 2。

附注 4.0.9. S^{4n-1}可不可以平行化除了 $n=1$ 或 2 [23]的问题可以转化成$SO(4n-1)$的同伦群的语言，就是当 $n\geq 3$， $\pi_{4n-2}(SO(4n-1))$ 是不是0。由上面表格显然可知。

参考文献

[1] J Frank Adams. "*On the non-existence of elements of Hopf invariant one*". *Annals of Mathematics*, **1960**: 20–104.

[2] MA Aguilar and Carlos Prieto. "*Quasifibrations and Bott periodicity*". *Topology and its Applications*, **1999**, *98*(1): 3–17.

[3] MF Atiyah. "*On the K-theory of compact Lie groups*". *Topology*, **1965**, *4*(1): 95–99.

[4] MF Atiyah. "*Vector bundles and the Künneth formula*". *Michael Atiyah Collected Works: Volume 2: K-Theory*, **1988**, *2*: 211.

[5] MF Atiyah and F Hirzebruch. "*Vector bundles and homogeneous spaces1*". *Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics, 3. AMS, Providence, RI*, **1961**.

[6] MF Atiyah and JA Todd. "*On complex Stiefel manifolds*". In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **1960**: 342–353.

[7] Michael F Atiyah, Raoul Bott and Arnold Shapiro. "*Clifford modules*". *Topology*, **1964**, *3*: 3–38.

[8] Michael Atiyah and Raoul Bott. "*On the periodicity theorem for complex vector bundles*". *Acta mathematica*, **1964**, *112*(1): 229–247.

[9] Mark J Behrens. "*A new proof of the Bott periodicity theorem*". *Topology and its Applications*, **2002**, *119*(2): 167–183.

[10] Armand Borel. "*Topology of Lie groups and characteristic classes*". *Bulletin of the American Mathematical society*, **1955**, *61*(5): 397–432.

[11] Armand Borel and Friedrich Hirzebruch. "*Characteristic classes and homogeneous spaces, II*". *American Journal of Mathematics*, **1959**: 315–382.

[12] Raoul Bott. "*An application of the Morse theory to the topology of Lie-groups*". *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, **1956**, *84*: 251–281.

[13] Raoul Bott. "*The stable homotopy of the classical groups*". *Annals of Mathematics*, **1959**: 313–337.

[14] Edgar H Brown Jr. "*The Cohomology of BSO(n) and BO(n) with Integer Coefficients*". *Proceedings of the American Mathematical Society*, **1982**: 283–288.

[15] Martin Čadek and Mamoru Mimura. "*The cohomology rings of real Stiefel manifolds with integer coefficients*". *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **2003**, *43*(2): 411–428.

[16] E Dyer and R Lashof. "*A topological proof of the Bott periodicity theorems*". *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **1961**, *54*(1): 231–254.

[17] Charles H Giffen. "*Bott periodicity and the Q-construction*". *CONTEMPORARY MATHEMATICS*, **1996**, *199*: 107–124.

[18] Bruno Harris. "*Bott periodicity via simplicial spaces*". *Journal of Algebra*, **1980**, *62*(2): 450–454.

[19] Luke Hodgkin. "*On the K-theory of Lie groups*". *Topology*, **1967**, *6*(1): 1–36.

[20] IM James. "*Cross-sections of Stiefel manifolds*". *Proceedings of the London Mathematical Society*, **1958**, *3*(4): 536–547.

[21] Max Karoubi. "*Algèbres de Clifford et K-théorie*". In: *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, **1968**: 161–270.

[22] Michel Kervaire. "*Some nonstable homotopy groups of Lie groups*". *Illinois Journal of Mathematics*, **1960**, *4*(2): 161–169.

[23] Michel A Kervaire. "*Non-parallelizability of the n-sphere for* $n > 7$". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **1958**, *44*(3): 280.

[24] Daisuke Kishimoto. "*A topological proof of real and symplectic Bott periodicity theorem*". *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **2001**, *41*(1): 33–41.

[25] Akira Kono and Ken-ichi Tokunaga. "*A topological proof of Bott periodicity theorem and a characterization of BU*". *J. Math. Kyoto Univ*, **1994**, *34*(4): 873–880.

[26] H Matsunaga. "*APPLICATIONS OF FUNCTIONAL COHOMOLOGY OPERATIONS TO THE CALCULUS OF* $\pi_{2n+i}(U(n))$ *FOR* $i = 6, 7$, $n \geq 4$". *ibid*, **1963**, *17*(1): 29–62.

[27] Hiromichi MATSUNAGA. "*ON THE GROUPS* $\pi_{2n+7}(U(n))$*, ODD PRIMARY COMPONENTS*". *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University. Series A, Mathematics*, **1962**, *16*(2): 66–74.

[28] Hiromichi Matsunaga. "*Correction to the preceding paper and note on the James number*". *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University. Series A, Mathematics*, **1962**, *16*(1): 60–61.

[29] Hiromichi Matsunaga. "*THE HOMOTOPY GROUPS* $\pi_{2n+i}(U(n))$ *FOR i= 3, 4 AND 5.*" *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University. Series A, Mathematics*, **1961**, *15*(1): 72–81.

[30] Hiromichi Matsunaga. "*Unstable homotopy groups of unitary groups (odd primary components)*". *Osaka Journal of Mathematics*, **1964**, *1*(1): 15–24.

[31] Clair E Miller. "*The topology of rotation groups*". *Annals of Mathematics*, **1953**: 90–114.

[32] John Willard Milnor. *Morse theory*. Princeton university press, **1963**.

[33] Mamoru Mimura and Hiroshi Toda. *Topology of Lie groups, I and II*. American Mathematical Soc., **2000**.

[34] Robert E Mosher. "*Some homotopy of stunted complex projective space*". *Illinois Journal of Mathematics*, **1969**, *13*(1): 192–197.

[35] Robert E Mosher. "*Some stable homotopy of complex projective space*". *Topology*, **1968**, *7*(2): 179–193.

[36] Hideaki Oshima. "*On the homotopy group* $\pi_{2n+9}(U(n))$ *for* $n \geq 6$". *Osaka Journal of Mathematics*, **1980**, *17*(2): 495–511.

[37] GF Paechter. "*THE GROUPS* $\pi_r(V_{n,m})$". **1956**.

[38] FP Peterson and N Stein. "*Secondary cohomology operations: two formulas*". *American Journal of Mathematics*, **1959**: 281–305.

[39] Harsh V Pittie. "*The integral homology and cohomology rings of SO (n) and Spin (n)*". *Journal of pure and applied algebra*, **1991**, *73*(2): 105–153.

[40] Hans Samelson. "*Topology of Lie groups*". *Bulletin of the American Mathematical Society*, **1952**, *58*(1): 2–37.

[41] Jean-Pierre Serre. "*Cohomologie modulo 2 des complexes d' Eilenberg-MacLane*". *Commentarii Mathematici Helvetici*, **1953**, *27*(1): 198–232.

[42] Norman E Steenrod and David BA Epstein. *Cohomology operations: lectures*. University Press, **1965**.

[43] Hirosi Toda. "*A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzeburch for homotopy*". **1959**.

[44] Hirosi Toda. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. Princeton University Press, **1962**.

[45] George W Whitehead. "*Generalized homology theories*". *Transactions of the American Mathematical Society*, **1962**: 227–283.

[46] Regina Wood. "*Banach algebras and Bott periodicity*". *Topology*, **1966**, *4*(4): 371–389.

[47] Ichiro Yokota. "*On the homology of classical Lie groups*". *Jour. Inst. Poly. Osaka City University*, **1957**, *8*: 93–120.

附录 A　Eilenberg-Maclane空间的同调群

一个映射$\Phi : H^n(X;G) \to H^{n+q}(Y;H)$如果是自然的，那么称之为$(n, G, n+q, H)$型的上同调算子。如果$\Phi$和上边缘算子是交换的，那么$\{\Phi\}$的集合称之为阶为$q$的$(G, H)$型稳定上同调算子。

定理 A.0.1. *存在Steenord算子*

$$Sq^r : H^n(X;\mathbb{Z}_2) \to H^{n+r}(X;\mathbb{Z}_2)$$

使得

1. Sq^r 是满足$Sq^r(x) = x^2$ $(x \in H^r)$的稳定上同调算子;

2. $Sq^0 = id$, $Sq^r = 0$ $(r < 0)$, $Sq^r(x) = 0$ $(x \in H^n, n < r)$;

3. $Sq^1 = \beta_2$;

4. (the Cartan formula) $Sq^r(xy) = \sum_{s+t=r} Sq^s(x)Sq^t(y)$;

5. (the Adem relations) $Sq^aSq^b = \sum_t \binom{b-t-1}{a-2t} Sq^{a+b-t}Sq^t$.

证明. 见[42]

下面我来计算Eilenberg-Maclane空间的同调群[41]。

定理 A.0.2. *$H^*(K(\mathbb{Z}_2, n), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[Sq^I u_n; I$ 是可接受的$, e(I) < n]$;*
$H^*(K(\mathbb{Z}, n), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[Sq^I u_n; I = (i_1, \cdots, i_l), I$ 是可接受的$, i_l > 1, e(I) < n]$;

证明. 我们只证明第一个，第二个是类似的。对n归纳，当$n = 1$时，$K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{R}P^\infty$，我们有$H^*(K(\mathbb{Z}_2, 1), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[u_1]$成立。假定$n = k$时成立，我们有

$$H^*(K(\mathbb{Z}_2, k)) = \mathbb{Z}_2[Sq^I u_k] = \Delta(Sq^J u_k; \text{J是可接受的}, e(J) < n+1)$$

。当$n = k+1$时，考虑纤维化$K(\mathbb{Z}_2, k) \to PK(\mathbb{Z}_2, k+1) \to K(\mathbb{Z}_2, k+1)$，由Borel定理知道$H^*(K(\mathbb{Z}_2, k+1), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[Sq^J u_{k+1}]$。

这里我们只考虑$\mathbb{Z}_2$系数的情形，当p是一个大于3的素数时，$\mathbb{Z}_p$也有类似的结果成立，但结果会复杂的多。

附录 B　李群的K-理论

李群的K-群最先由Atiyah运用Atiyah-Hirzebruch谱序列来研究[5]。

定理 B.0.1. 记 X 是一个有限CW复形。设$K_p^*(X)$ 是$K^*(X) \to K^*(X^{p-1})$的核。那么存在一个谱序列 $E_r^p(X), r \geq 1$，

$$
\begin{aligned}
E_1^p(X) &\simeq C^p(X, \mathbb{Z}) \\
E_2^p(X) &\simeq H^p(X, \mathbb{Z}) \\
E_\infty^p(X) &\simeq G_p K^*(X) = K_p^*(X)/K_{p+1}^*(X)
\end{aligned}
$$

边缘算子 d_r是退化的当 r是偶数时。

当$H^*(X, \mathbb{Z})$ 没有扭元素或者 $H^i(X, \mathbb{Z}) = 0$ ，i为奇数，很容易证明谱序列 $E_r^p(X)$ 退化。

定理 B.0.2. 记 X 是一个有限CW复形，谱序列 $E_r^p(X) \otimes \mathbb{Q}$ 退化。

$$ch : K^*(X) \to H^*(X, \mathbb{Q})$$

是一个双射。

这样，我们得到 $K^0(X)$的秩等于 X 的偶数维Betti数的和， $K^1(X)$的秩等于X的奇数维Betti数的和。当X是李群时，我们有如下定理:

定理 B.0.3. 记 G是一个紧致连通李群， U 是一个闭极大秩李子群。那么$K^1(G/U) = 0$，$K^0(G/U)$ 是一个自由$Abel$群，秩为 G和 U的$Weyl$群的阶数的商。

证明. 我们证明当$U = T$时。若$T \subset U$，定理的证明是类似的。在这个条件下， G/T 没有扭元素且奇数维同调群退化。那么由 $|W|$ 等于G/T的欧拉数，等于$\dim_{\mathbb{Q}} H^{even}(G/T; \mathbb{Q})$，我们就得到上述定理。

沿着M.Atiyah的道路， L.Hodgkin 得到了$K^*(G)$的完整结果，当$\pi_1(G) = H_1(G)$ 是无扭元素的 [19]。不久M.Atiyah给出了另一个证明[3].

记 G是一个紧李群。令$(\rho_1, \rho_2, \cdots)$ 是G的不可约表示的等价类。令$R(G)$ 是由ρ_i生成的自由Abel群。表示的张量积使得$R(G)$ 是一个环，我们称$R(G)$ 是 G的表示环。

引理 B.0.4. *若G是交换的，特征群是Γ，那么$R(G)$自然的同构与群环$\mathbb{Z}[\Gamma]$。*

记 Λ_+ 是 } 的最大权的集合，Λ_+ 是一个由基本权 $\omega_1, \cdots, \omega_l$， $l = rank(G)$生成的自由半群。如果一个表示 ρ 有一个极大权 $\lambda \in \Lambda_+$，我们记$\omega^+(\rho) = \lambda$。

定义 B.0.5. 基本表示 $\rho_1, \cdots, \rho_l$ 是由 $\omega^+(\rho_i) = \omega_i$定义的不可约表示。

附注 B.0.6. ρ 与 $\omega^+(\rho)$ 是一个G 的不可约表示和Λ_+的一一对应。那么 $R(G)$是一个多项式代数 $\mathbb{Z}[\rho_1, \cdots, \rho_l]$。

引入上述记号之后，我们来叙述本节的主要定理:

定理 B.0.7. *记G是一个紧致单连通李群且$\pi_1(G)$是无扭的。那么*

1. $K^*(G)$ 是无扭的;

2. $K^*(G)$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次的Hopf代数;

3. 作为一个Hopf代数， $K^*(G)$ 是由次数为1的本原元素生成的外代数;

4. 一个酉表示$\rho : G \to U(n)$，复合上自然嵌入 $U(n) \subset U$定义了一个在$[G,U] = K^1(G)$中的同伦类$\beta(\rho)$。那么由$K^1(G)$ 中本原元素生成的模就是由这些同伦类 $\beta(\rho)$生成的模;

5. 特别的，如果G是一个秩为l的半单李群， l个基本表示$\rho_1, \cdots, \rho_l$和这些代表的同伦类 $\beta(\rho_1), \cdots, \beta(\rho_l)$ 构成了上述本原元素的集合的一个基底，我们可以记成

$$K^*(G) = \Lambda(\beta(\rho_1), \cdots, \beta(\rho_l))$$

接下来的部分给出一个沿着L.Hodgkin的思路的证明梗概。这个证明依赖李群的分类定理和李群的同调群。我们把证明分成两部分，首先我们在假定1的条件下证明2 到5。

记 Π 是所有素数的集合。若 $\mathbf{p}$是 Π的一个子集，我们记 $\mathbb{Q}(\mathbf{p})$ 是 $\mathbb{Z}$ 在$\mathbf{p}$处的局部化。$\mathbb{Q}(\phi) = \mathbb{Z}$ and $\mathbb{Q}(\Pi) = \mathbb{Q}$.

定义 B.0.8. 一个空间 X，如果 $K(G; \mathbb{Q}(\mathbf{p}))$ 是无扭的，称之为 $\mathbb{Q}(\mathbf{p})$-自由。

记 $I(G)$ 是由嵌入 $* \to G$诱导的映射$\epsilon : R(G) \to R(*))$ 的核。给定 $\beta(\rho) \in [G,U] = K^1(G)$，我们把 β 看成是 $R(G) \to K^1(G)$的一个映射。令$J(G)$ 是商群 $I(G)/I(G)^2$，我们知道 β 在$I(G)^2$ 是退化的，所以诱导$\tilde{\beta} : J(G) \to K^1(G)$。

记 R 是映射$\tilde{\beta} : J(G) \to K^1(G)$的像，我们把$R \otimes \mathbb{Q}(\mathbf{p})$ 嵌入到$K(G; \mathbb{Q}(\mathbf{p}))$。

定理 B.0.9. *如果 G 是一个 $\mathbb{Q}(\mathbf{p})$-自由的连通李群，那么*

1. $R\otimes\mathbb{Q}(\mathbf{p})$ 是Hopf代数$K^*(G;\mathbb{Q}(\mathbf{p}))$中本原元素生成的模；

2. 如果外代数 $\Lambda_{\mathbb{Q}(\mathbf{p})}(R\otimes L)$ 是由$R\otimes L$中的本原元素给定的Hopf代数结构，那么嵌入$R\otimes L\to K^1(G;\mathbb{Q}(\mathbf{p}))$ 诱导一个Hopf代数的同构

$$\Lambda_{\mathbb{Q}(\mathbf{p})}(R\otimes L)\simeq K^*(G;\mathbb{Q}(\mathbf{p}))$$

如果 G 是半单的和单连通的，显然 $\pi_1(G)=0$，那么 G 是$\mathbb{Z}$-自由的。由上述定理我们得到 $K^*(G)=\Lambda_{\mathbb{Z}}(\beta(\rho_1),\cdots,\beta(\rho_l))$。我们可以知道 $j(\rho_i)$ 构成了 $J(G)$的一组基底。

定理 B.0.10. *记 P_0 是由$A\otimes\mathbb{Q}$中本原元素生成的模，P 是由A中本原元素生成的模。那么$A\otimes\mathbb{Q}=\Lambda_{\mathbb{Q}}(P_0)$ 表明 $A=\Lambda_{\mathbb{Q}(\mathbf{p})}(P)$。*

证明. 见 [19].

这是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次 Hopf 代数的结构性定理。令$A=K^*(G;\mathbb{Q}(\mathbf{p}))$ 使得 $A\otimes\mathbb{Q}=K^*(G;\mathbb{Q}(\mathbf{p}))$，由同构 $ch_{\mathbb{Q}}$和$H^*(G;\mathbb{Q})=\Lambda_{\mathbb{Q}}(ch_{\mathbb{Q}}(P_0))$，我们有 $K^*(G;\mathbb{Q})=\Lambda_{\mathbb{Q}}(P_0)$。由上述结构性定理可以下面结果:

定理 B.0.11. *如果 G 是$\mathbb{Q}(\mathbf{p})$-自由的，那么$K^*(G;\mathbb{Q}(\mathbf{p}))$ 作为Hopf代数同构与一个由次数为1的本原元素的生成的外代数。*

记 $G\to EG\to BG$ 是一个万有 G-丛，$\delta:K^1(G;\mathbb{Q}(\mathbf{p}))\to\mathbf{K^0}(\mathbf{EG},\mathbf{G};\mathbb{Q}(\mathbf{p}))$ 是一个同构。定义σ_G 是一个复合映射 $\delta\circ\pi^!$，那么我们可以把 $R\otimes\mathbb{Q}(\mathbf{p})$ 看成是σ_G in $K^1(G;\mathbb{Q}(\mathbf{p}))$的像。

因此, 定理的第1部分等价于$K^1(G;\mathbb{Q}(\mathbf{p}))$ 中的本原元素就是σ_G的像，或者从上同调来看就是万有transgression元素，这是我们已经知道的结论。

剩下的我们需要说明如果 G 是半单的和单连通的，$K^*(G)$ 是无扭的。由K-理论的Künneth公式[4]，我们只需要证明当G是单的。

引理 B.0.12. *如果 X 是一个有限CW复形，$K^*(X)$ 由有 p-扭元素等价于$H^*(X;\mathbb{Z})$ 有p-扭元素。*

那么问题变成了即使是$H^*(X;\mathbb{Z})$ 有 p-扭元素，$K^*(X)$ 没有 p-扭元素。通过李群的分类定理和我们先前计算的李群的同调群，我们只需要逐个验证下面情形就好。

让我们考虑(G,p) 使得G 是一个单连通的单李群，p 是一个素数。记$\mathcal{O}$ 是这样的配对$H^*(G;\mathbb{Z})$ 有p-扭元素的集合。

$$
\begin{aligned}
&p=2, G=Spin(n)(n\geq 7), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8\\
&p=3, G=F_4, E_6, E_7, E_8\\
&p=5, G=E_8
\end{aligned}
$$

引理 B.0.13. 如果 X 是一个有限CW复形，$\dim_p K^*(X,\mathbb{Z}_p)\geq \dim_{\mathbb{Q}} K^*(X,\mathbb{Q})$，等号成立当且经当 $K^*(X)$没有 p-扭元素。

记 G 是一个秩为l的单李群，那么$\dim_{\mathbb{Q}} K^*(G,\mathbb{Q})=\dim_{\mathbb{Q}} H^*(G,\mathbb{Q})$ 等于 2^l。因此只需要证明: 如果$(G,p)\in\mathcal{O}$ 且G 秩为 l，那么$\dim_p K^*(G,\mathbb{Z}_p)=2^l$。

定理 B.0.14.

1. 如果 $(G,p)\in\mathcal{O}$ 除了$(E_7,2)$, $(E_8,2)$ 且G 秩为 l，那么 $\dim_p(E_{2p}(G;\mathbb{Z}_p))=2^l$;

2. 如果 $G=E_7,E_8$，那么 $\dim_2(E_6(G;\mathbb{Z}_2))=2^l$。

证明. 见 [19].

综上，我们就完成了定理的证明。

致谢

我非常感谢我的导师范后宏副教授，在他的悉心指导和严格要求下，我开始学习关于李群的拓扑的计算，在这个过程中，我学到了代数拓扑中最重要的计算工具谱序列和上同调算子，也了解代数拓扑和数学的各个领域的深刻联系。在硕士三年的学习过程中，我不仅仅增长了知识，更知道了做学问应有的态度。在此，我向我的指导老师表示最诚挚的敬意！

北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名：　　　　　　日期：　　年　　月　　日

学位论文使用授权说明

（必须装订在提交学校图书馆的印刷本）

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；
- 因某种特殊原因需要延迟发布学位论文电子版，授权学校在 □ 一年 / □ 两年 / □ 三年以后在校园网上全文发布。

（保密论文在解密后遵守此规定）

论文作者签名：　　　　　　导师签名：　　　　　　日期：　　年　　月　　日